

Др Милосав М. Марјановић

ЈЕДАН ПРИСТУП ИЗВОЂЕЊУ НАСТАВЕ АРИТМЕТИКЕ, II

Апстракт. У овом наставку нашег чланка, прво укључујемо један садржај психолошке природе који се односи на формирање појмова, а који се схватају као трипартитна целина коју чине одговарајући примери, ментална слика и назив (односно симбол којим се појам означава). Затим се детаљно излаже изградња блока бројева до 10, као система појмова међусобно везаних односима који се изражавају једнакошћу збира два броја са трећим бројем и разликом два броја са трећим бројем. Основа на којој се успостављају ове једнакости је бројање чланова скупова и њихово једначење по броју.

Дидактички задаци везани за овај блок су правилно писање цифара као симбола којима означавамо бројеве 0, 1, ..., 9, учачавање адитивних схема, уз које иду задаци сабирања или одузимања и састављање записа којима се ови задаци изражавају. Вежбањима те врсте постиже се такође спонтано запамћивање таблице сабирања и одузимања до 10.

Третира се и правило размене места сабирака и истиче као принцип који се не доказује, него се прихвата на основу интуиције коју тим путем исказујемо.

7. Схема појма. У овом излагању користимо речи „идеја“ и „појам“ са разликом у значењу коју ћемо овде истаћи путем прецизирања значења друге од ових речи. Реч „идеја“ биће слободније коришћена да се означе оне апстракције које настају посматрањем одређене врсте односа или својстава. Тако, на пример, можемо рећи да се кроз активности пребројавања формирају идеје о почетним природним бројевима: један, два, три итд. Али активности путем којих формирамо појмове су потпуније и састоје се од издвајања објеката који ће бити основа за развијање значења неког појма; контакт са тим објектима траје док се не развије у нашем уму унутрашња представа везана за те објекте и коначно, појмове кодикујемо у подручју језика додељујући им речи којим их изражавамо (односно симболе којим их означавамо).

Деца у предшколском периоду развију низ појмова везаних за одређену врсту објеката у њиховом окружењу. Тако, на пример, ступајући у контакт са предметима као што су конкретни столови у њиховом свакодневном окружењу формирају,

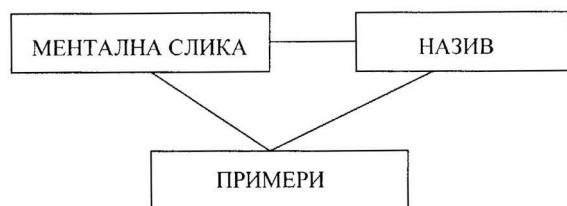
на спонтан начин, појам „стола“. Ти конкретни столови чијим опажањем се формира значење овог појама, називају се *примери* за тај појам. Учећи од одраслих, деца везују за те предмете реч „сто“, за коју кажемо да је *назив* за тај појам. А временом се у уму детета формира унутрашња представа која окупља нека карактеристична својства свих тих конкретних столова који су се налазили у оквиру његовог искуства. Ову унутрашњу представу називамо ментална слика и њу је немогуће тачно описати, нити се она може поистоветити са било којом визуелном представом реалног света. Лакше је ређати својства која нису карактеристична као што је облик (постоје столови са три, четири или више ногу, са троугластом, четвртастом или округлом плочом итд), боја (неки столови су браон, неки бели итд), материјал од кога су грађени (неки столови су дрвени, други метални или пластични итд). За укупност свих тих небитних својстава користи се у психологији термин „шум“. Дакле, шум представљају она својства која неки примери који одговарају неком појму могу да имају, а други не. А ми смо управо навели нека таква својства која прате појам „стола“. Може се рећи да деца имају формирану менталну слику кад она постане функционална, рецимо, у случају појама „сто“ кад као столове сврставају и оне објекте те врсте које први пут виде.

На врло сличан начин деца формирају низ других спонтаних појмова као што су „столица“, „чаша“, „тањир“ итд. а кад се њихово искуство прошири поласком у школу то ће такође бити појмови као што су „табла“, „оловка“, „свеска“ итд. Напоменимо да човек формира нове спонтане појмове кад год се његово искуство шири, па се тај процес не ограничава ни на једно животно доба. По Л. С. Вигоцком (Мишљење и говор, Нолит, Београд 1983) спонтани се појмови разликују од научних тиме што ови задњи чине системе у којима су међусобно везани разним релацијским везама. Видећемо да се као системи појмова могу узети блокови бројева до 10, до 20 итд, односно изградњом тих блокова бројеви се од самог почетка формирају као научни појмови. А кад, пак, на бројеве гледамо као на индивидуалне појмове, они се тада ничим не разликују од спонтаних. Тако, на пример, уз појам броја „три“, примери су сви трочлани скупови, језички код као назив за овај појам је реч „три“, а симболичка ознака цифра „3“, док менталну слику визуелно добро представљају три тачке (иако је с таквом представом не поистовећујемо).

Као што је то сасвим јасно, наша намера није да дајемо дефиницију шта је то појам. Истакнути француски математичар и филозоф Рене Том каже да се појмови најбоље осмишљавају својим постојањем или, ако то мало друкчије схватимо, њиховом употребом. Оно што намеравамо да урадимо биће опис једне опште схеме која прати процес формирања појмова. Она је наша допуна једне такве схеме коју преузимамо из књиге R. R. Skemp, *The Psychology of Learning Mathematics*, Pennguin Books, 1993.

Појам схватамо као трокомпонентну целину коју чине: „Примери“, „Ментална слика“ и „Назив“ (са могућом симболичком ознаком) (слика 13).

Кад су примери објекти или ситуације реалног света, тада кажемо да је тај појам на *сензорном* (*опажајном*) нивоу. Већина појмова школске аритметике налази се на сензорном нивоу, али за неке апстрактније појмове, њихови примери



Слика 13

могу бити и сами појмови мањег степена апстрактности. На пример, за појам природног броја, примери су појединачни бројеви: један, два, три, итд, а који су и сами појмови али мањег степена апстрактности. За два појма A и B кажемо да је појам A апстрактнији од појма B кад је појам B пример за појам A . Тако је појам „четвороугао“ апстрактнији од појма „паралелограм“, а појам „паралелограм“ од појма „правоугаоник“. Објекте реалног света не сматрамо појмовима него за њих кажемо да су феномени. Дакле феномене опажамо, а појмове формирамо путем апстраховања. Ментална слика је представа која се формира у уму и за њу кажемо да интегрише својства која имају сви примери који одговарају неком појму. Но, то не значи да ми заиста можемо да издвајамо та својства, него се функција менталне слике своди на способност ума да везује речи које су називи за појмове са примерима који одговарају тим појмовима и да разликује примере који припадају неком појму од оних који му не припадају.

Говорећи уопштено, својства која имају сви примери који одговарају неком појму називамо *битним* односно *карактеристичним* за тај појам. Небитна су она својства која неки од тих примера имају, а неки други не. За таква својства, као што је већ речено, кажемо да представљају *шум*. Сад можемо са више прецизности рећи да је идеограм *иконички* знак којим представљамо неки појам, представљајући тим знаком неки његов пример који има што је могуће мање шума.

Напоменимо да Вигоцки користи термин *систем* да њиме означи једну класу појмова заједно са свим релацијама које их везују. Кад је такав систем формулисан у терминима скупова и скуповних релација, тада се он зове (математичка) *структура*. У психологији се, пак, под *менталном* (когнитивном) *стемом* подразумева спој међусобно повезаних менталних слика. Тако бисмо могли рећи да је ментална схема одраз у нашем уму неког система појмова.

Ово опште излагање о појмовима и њиховим системима укључили смо да претходи излагању аритметичких тема као што су блокови бројева. Те блокове чине појмови појединачних бројева са свим релацијским везама које се изражавају путем аритметичких операција, па су тако прави примери система појмова чија је изградња главни задатак наставе аритметике.

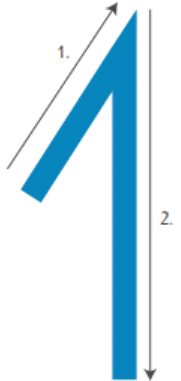
8. Блок бројева до 10. Сваки од бројева један до десет заслужује да му се посвети посебна лекција у којој се његово значење развија зависно од представа о скуповима који служе као одговарајући примери, али се тај број такође везује

и за друге бројеве који му претходе изражавајући те везе у виду одговарајућих збирова и разлика. На тај начин овај блок се формира као адитивна структура, а тим путем се такође спонтано запамћује таблица сабирања до 10.

• Шта видиш на слици?



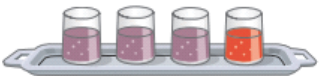
Број **ЈЕДАН** означавамо



Научи правилно да пишеш ову ознаку.
Њу називамо цифра један или „јединица“.

• Три сока од јагоде и један од боровнице.
Колико је то сокова?

А



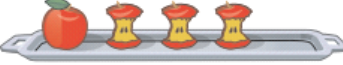
Колико је сокова од боровнице? А од јагоде?
Колико је то укупно сокова?

Б



• Колико је било јабука? Колико је поједено?
Колико је остало?

А



Б



Тупом стране оловке повлачи дуж велике „јединице“.

Слика 14

Постоји једна општа тенденција да се курсеви дидактике математике затрпавају разним садржајима у знаку теоретисања, па се сматра да се на тај начин подиже њихов академски ниво. Та теоретисања често имају мало додира са реалним токовима наставе, и ако се неки мањи број примера ту нађе, они су крајње недовољни да створе једну потпунију представу о корисности прокламованих ставова и укупном обликовању наставних тема. Кад излагање почне да подсећа на

дидактичка обликовања каква се виде у уджбеницима, то се тада сматра падом нивоа и активношћу која је недостојна једног теоретичара (чије ће идеје други разрађивати, а ако то није успешно, ти су други криви за недовољно разумевање).

Као што се лако наслућује, наши погледи су сасвим другачији и иду одоздо нагоре, јер ми сматрамо да је сваки теоријски став без своје основе у конкретним садржајима празна умотворина, која је као таква нека врста интелектуалног насиља. Зато, ми узимамо да је *егземплирање доказивање вредности изведеног става*, а не пад академског нивоа. Па та наша тежња да не губимо везу са конкретним садржајима, овде нас води у скицирање дидактичке разраде садржаја овог блока, а примери које ћемо обухватити рефлектоваће неке опште дидактичке ставове и процедуре.

Може изгледати претерано да се наставној јединици „Број један“ посвете један до два школска часа, али надам се да ће се читаоци лако сложити са мном да то није тако. „Отворимо“ почетну страницу лекције „Један“.

У првом примеру на слици 14 виде се објекти разне врсте али свуда по један од њих. На наставниково питање шта се све види на тој слици одговара се коришћењем речи „један“ (а што иначе наставник сугерише): једна кућа, једно дрво, један мост итд. Напоменимо да су те вежбе усмеравања пажње на један објекат (при чему све друго што је у видном пољу остаје у позадини) такође значајне вежбе психолошке природе.

У другом и трећем примеру број „један“ се јавља у улози сабирка и умањџоца само што се то ради на конкретан начин, при чему је ученик ослоњен на значење чија су основа дате слике и где се одговори добијају бројањем. Овде се такође види значај бројања као уводне теме аритметике, која ће трајати све дотле док не почне рачунање у правом смислу (а о томе ћемо говорити касније на за то одговарајућем месту). Са сличним примерима (и у оквиру скупова чија бројност не прелази пет) ова, или овакве две лекције, имаће довољно битног садржаја за разраду. Писање „јединице“ иде у два потеза који су представљени стрелицама. Ове потезе деца прво изводе повлачењем тупе стране оловке као предигру за писање јединице. Затим се из допунског радног материјала задаје писање јединице оловком, уписивањем у веће и мање квадратиће чиме се рука присиљава на контролисано повлачење мањих потеза:

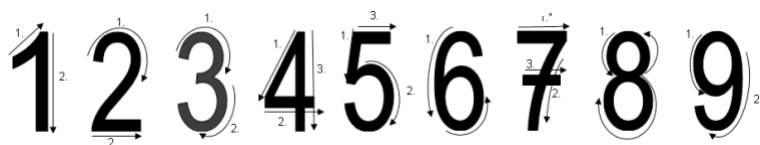
Вежбај руку. Пиши јединице.

1							
---	--	--	--	--	--	--	--

1							
---	--	--	--	--	--	--	--

Слика 15

8.1. Правилно писање цифара. Све цифре пишу се једним, два или највише у три потеза. Но, прво рецимо прецизно шта значи један потез. То је непрекидно кретање врха оловке док то кретање не стане, да би се променио правца писања или се пренео врх оловке на неко друго место. На слици 16 стрелице



Слика 16

показују ток и редослед потеза којим се правилно пишу цифре.

Само писање почиње идући слева надесно и одозго надолу. Наравно да је боље и за децу и наставника да писање од почетка тече на правилан начин него ли да се лоше навике касније исправљају. Ми предлажемо вежбања која почињу кретањем руке по назначеним стрелицама, али те вежбе руке обухватају писање цифара већег и мањег формата. Више пута ти тако поновљени покрети запамћују се, а њиховим понављањем и сами теже све већој правилности (тј. писање постаје увежбаније и лепше). Напоменимо да није никаква озбиљна грешка ако се неки потез разбије на два случаја кад рука иде надолу и кад иде нагоре. То може да буде, на пример, кад се пишу цифре нула, шестика и осмица:



Слика 17

Слично теку лекције за осталих пет бројева од 1 до 5. На слици 18 види се део такве лекције посвећене броју „три“.

Видимо да се у примеру 2 илуструје ситуација која се схвата као адитивна схема а текст упућује на задатак сабирања. Сама активност је слагање крушака са прве две тацне на трећу па је то, формално гледано, унирање скупова а питање „сад их је“ упућује на задатак сабирања који се у овој фази своди на бројање. То је интерпретација за ова два иконичка представљања (под А и Б). Гледајући на цртеже крушака као иконичке знакове, можемо узимати да ти цртежи у случају прве две тацне припадају једном а они у случају треће тацне другом иконичком домену, а то одговара представљању ових двеју ситуација (пре и после преслагања) као да се дешавају у два различита тренутка. Ако, пак, све то гледамо у оквиру једног иконичког домена, тада су цртежи крушака на трећој тацни различити иконички знаци од цртежа тих крушака на првим двема тацнама. Ти знаци представљају исте крушке али у различитим положајима па тако јесу различити иконички знаци који стоје на различитим местима.

У вежби 3, адитивну схему прати задатак одузимања „било је, па је остало“ који се такође решава бројањем, а у првом случају (под А) број „три“ је у улози умањеоца дак је у другом случају (под Б) у улози разлике. На овај начин међусобно се везују бројеви до 5 али не говоримо, нпр, три и два су пет (јер још

• Шта видиш на слици?



Цифра којом означавамо број **ТРИ**



Научи правилно да пишеш цифру три или „тројку“.

• Посматрај слике и допуни одговоре.

Крушака је било ...

Додате су ...

Сад их је ...

А



Б



• Колико је било крушака?
Колико је поједено, а колико је остало?

А



Б



Тупом стране оловке повлачи дуж велике „тројке“.

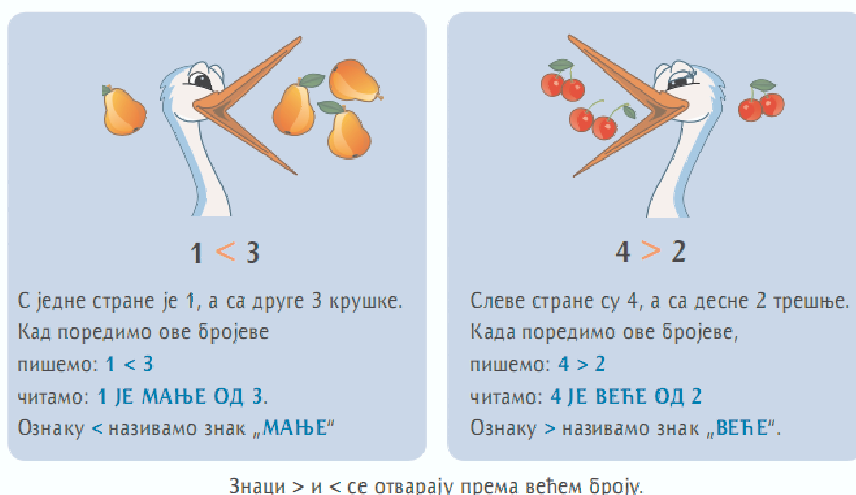
Слика 18

није обрађивана операција сабирања одвојено од конкретних значења) него се изражавање веже за конкретне скупове именовањем њихових чланова па се каже, нпр, „три крушке и две крушке су пет крушака“.

8.2. Поређење по бројности. Кад су завршене лекције посвећене бројевима од 1 до 5, те бројеве почињемо да сматрамо апстрактним појмовима и да с њима тако и оперишемо, а на реду је њихово поређење по величини. Но, прво се пореде парови скупова са истородним члановима и постављају питања где је тих чланова више. Наставник потврђује одговоре коментаришући, нпр, „да овде је више крушака – њих је 5 – него тамо где су 3 крушке“ и сл. Затим се на-

мерно заборавља на именовање чланова скупова, па се у поређењу говори само о бројевима тих чланова и каже се „да, пет је веће од три“ и сл. Ово је случај *форсирања апстракције*, а у том процесу начин изражавања игра значајну улогу. То форсирање се испољава и писањем једног од два знака „веће“ или „мање“ између два броја. Искуство говори о томе да деца теже разликују ова два знака, па и кад пореде бројеве коректно, праве грешку изражавајући тај однос симболички. Тако се јавља дидактички задатак да се истакне на „жив“ начин разлика између два знака „>“ и „<“. На слици 19 асоцирају се два отвора ових знакова са отворима кљуна роде.

Рода отвара кљун на ону страну где је више плодова.



Знаци > и < се отварају према већем броју.

Слика 19

Каже се да се погледају илустрације и види како рода отвара кљун на страну где је више плодова, а да се и знакови „>“ и „<“ „отварају“ према већем броју (и то буде основа на којој наставник исправља погрешно писање ова два знака).

Вежбе уз ову наставну јединицу чине парови скупова чији се бројеви елементарно пореде, а испод се пише одговарајућа неједнакост (при чему се слике гледају слева на десно, а тим редоследом испод њих пишу бројеви њихових елемената са празним местом између тих бројева, остављеним за један од знакова „>“ или „<“).

8.3. Операције сабирања и одузимања. Поновимо да је адитивна схема представа везана за опажање два скупа без заједничких чланова и трећег који је њихова унија (при чему тај трећи скуп се замишља као обједињавање чланова та два дата скупа или се формира путем њиховог груписања на истом месту). Сам задатак сабирања састоји се у томе да се претпоставља да знамо бројност та два скупа, а да се тражи бројност трећег који је њихова унија. Као први корак у обради наставне јединице сабирања је само записивање које се састоји

од коришћења знака „плус“ и састављања збира као записа коме је претходила представа о два скупа, које тим записивањем истичемо да их замишљамо као један трећи. Такав почетни корак у овој обради илустрован је сликом 20, где је и текст којим се казује како се записи који се овде уводе читају.



Ознака $+$ се назива знак **ПЛУС** или „**ВИШЕ**“.

Слика 20

Писање збирова је један корак у обради сабирања и врло је значајно одвојити га од „рачунања“, тј. од питања „а колико је то“ које тада подразумева цифарско записивање укупног броја чланова. Зато активност записивања збирова (без рачунања) треба истаћи као значајан корак и посветити јој одређен број вежби као што су оне на слици 21.



Пиши колико је црвених, а колико плавих кружића.
Затим пиши колико их је укупно.

Пиши одговарајуће бројеве.

Слика 21

8.3.1. Знак једнакости. Кад се два скупа узимају као њихова унија, пише се збир, нпр, $2+3$, а кад се бројност те уније изражава цифарски, пише се цифарски запис тог броја, нпр, 5. Тако имамо две различите ознаке за један те исти број (овде у нашем примеру, број „пет“). Кад се истиче да те ознаке представљају исти број тј. кад се оне на тој основи једначе, пише се знак једнакости између њих (нпр, пише се $2+3=5$). Како је сваки број једнак само самом себи, не треба знак једнакости схватати као једначење бројева него као једначење различитих ознака за један те исти број. Као један пример почетка обраде наставне јединице „Знак једнакости“ могу да послуже вежбе дате на слици 22.

Одузимање се такође обрађује у два корака – означавање писањем разлике и једначењем те ознаке са цифарским записом. Вежбе уз овај први корак могу бити попут ових на слици 23.

Напиши шта је потребно.

Напиши шта је потребно.

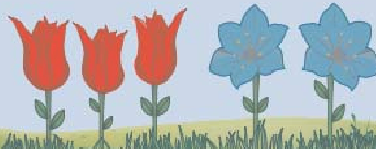
Слика 23

На грани су 3 птице.
Долеће још једна.
Укупно, то су 4 птице.



Пишемо $3 + 1 = 4$
Читамо: 3 ПЛУС 1 ЈЕДНАКО ЈЕ 4.

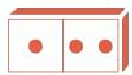
3 црвена и 2 плава цвета.
Укупно, то је 5 цветова.



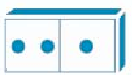
Пишемо: $3 + 2 = 5$
Читамо: 3 ПЛУС 2 ЈЕДНАКО ЈЕ 5.

Ознаку $=$ називамо **ЗНАК ЈЕДНАКОСТИ**
Запис у којем се јавља знак једнакости, називамо **ЈЕДНАКОСТ**.

Гледај слике и читај шта је написано.



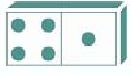
$1 + 2 = 3$



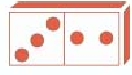
$2 + 1 = 3$



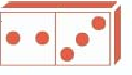
$2 + 2 = 4$



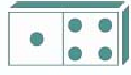
$4 + 1 = 5$



$3 + 2 = 5$



$2 + 3 = 5$



$1 + 4 = 5$

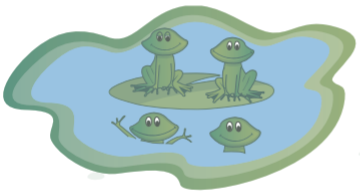
Слика 22

Наравно, писању разлике претходи представа о адитивној схеми уз коју је сугерисан задатак одузимања, а који можемо овако изразити: зна се бројност уније и једног од два дисјунктна скупа који је формирају а тражи се бројност оног другог. А кад се бројност тог другог скупа изрази путем цифарског записа, тада имамо опет два различита записа које једначимо, а што се види као процедура илустрована на слици 24.

Уз одузимање природно долази и обрада нуле као броја, а чији се смисао веже за „празно место“, бројањем уназад или одузимањем док „ништа не остаје“. На слици 25 илустроване су такве две ситуације.

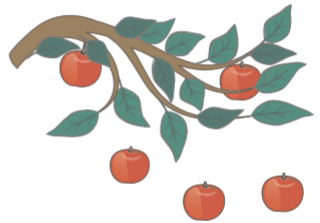
Примећује се да блок бројева до 10 раздвајамо на два дела – бројеви до 5 и они од 6 до 10. Са осмишљеном операцијом сабирања уведе се: број 6 као $5 + 1$, број 7 као $6 + 1$ али и као $5 + 2$, број 8 као $7 + 1$ и $5 + 3$, број 9 као $8 + 1$ и $5 + 4$ и број 10 као $9 + 1$ и $5 + 5$. Први од ових збирова одговарају бројању по један, а други сабирању где се јављају зборови који се лепо интерпретирају путем бројевних слика па се због тога и лако памте.

На локвању су седеле четири жабе.
Две су скочиле у воду.
Остале су две жабе.



Пишемо: $4 - 2 = 2$
Читамо: **4 МАЊЕ 2 ЈЕДНАКО ЈЕ 2**

Било је 5 јабука.
3 су опале.
Остале су 2.



Пишемо: $5 - 3 = 2$
Читамо: **5 МАЊЕ 3 ЈЕДНАКО ЈЕ 2**

Ознаку — називамо **знак МИНУС** или знак „**МАЊЕ**“

Слика 24

Посматрај слике.



На првој тацни су 4 колача, на другој 3, на трећој 2, на четвртој 1.
На последњој тацни нема колача. Можемо рећи да нема **НИЈЕДАН** колач.

Да то означимо, пишемо ознаку **0**, коју читамо **НУЛА**.

Слика 25

Како је лакше бројати од 7 до 9 него ли од 2 до 9, тако је лакше видети шта је збир $7 + 2$ него ли $2 + 7$. Али оваква два различита записа истог броја зависе од начина груписања, наиме једном видимо скуп са 7 и скуп са 2 члана, а други пут обрнутим редом, скуп са 2 и скуп са 7 чланова. По Канторовом принципу, број не зависи од начина груписања чланова неког скупа, па такве записе можемо да једначимо и, нпр, пишемо $2 + 7 = 7 + 2$. Илустрације и текст на слици 26 намењени су почетној обради овог правила, које називамо *правил о размени места сабирака* (а формалније, у математици, комутативним законом за сабирање).

Коментар. Важно је схватити да је правило о коме је овде реч, један од принципа аритметике. А принципи се не доказују него се прихватају као фундаменталне истине и на основу неке темељне интуиције коју овде уобличава Канторов принцип као општији од овог правила.

Наставник не би нипошто смео да упада у наивну процедуру провере овог правила рачунањем једног броја збирова са измењеним редоследом сабирака.

А Посматрај слику.

Миша и Сања су писали колико имају жетона.

Миша је писао:

Сања је писала:

$$4 + 2 = 2 + 4$$



Б Посматрај слику на два начина.



Јабука је 4

Крушака је 5

Укупно плодова је: $5 + 4 = 9$

Крушака је 5

Јабука је 4

Укупно плодова је: $4 + 5 = 9$

Кад срачунаш $5 + 4 = 9$ и без рачунања можеш писати $4 + 5 = 9$

Уочаваш правило: **КАД САБИРЦИ ЗАМЕНЕ МЕСТА ЗБИР СЕ НЕ МЕНЈА!**

Слика 26

Оно што треба да ради је давање вежби где се ово правило примењује ради лакшег „рачунања“. На пример: $3 + 7 = \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$ итд, односно кад то компресује и оставља размену сабирака као усмену операцију, да тада задаје: $3 + 7 = \underline{\quad}$, $2 + 6 = \underline{\quad}$ итд.

Приметили сте да кад говоримо о рачунању збирова (или разлика), ми ту реч стављамо под наводнике. Разлог је што се овде још не јављају никакве праве процедуре рачунања него се једначе записи тако што се или непосредно види који је то број који представљају или се, пак, то утврђује бројањем. Наставник је свестан колико је бројање важна уводна тема аритметике и да је оно као основна процедура овде у потпуности заступљено.

САНУ, Београд, Кнеза Михаила 35

E-mail: milomar@beotel.net