

Др Милосав М. Марјановић

ЈЕДАН ПРИСТУП ИЗВОЂЕЊУ НАСТАВЕ АРИТМЕТИКЕ, III

Апстракт. У овом, трећем наставку нашег чланка, скицира се и дискутује изградња блока бројева до 20. Коришћењем неких раних алгебарских техника, уводе се бројеви 11, 12, ..., 20 као зборови $10 + 1$, $10 + 2$, ..., $10 + 10$ (чије значење је већ објашњено у оквиру блока бројева до 10). Затим се разматрају први случајеви рачунања типа $13 + 5 = 10 + (3 + 5)$, односно $18 - 5 = 10 + (8 - 5)$, као и методе сабирања и одузимања са прелазом преко десетице. Ове процедуре се у раду у учионици ослањају на иконишне репрезентације у облику бројевних слика, које се примењују за формирање таблица сабирања и одузимања. Али детаљна дидактичка анализа показује да се оне базирају на следећим алгебарским правилима: $l + (m + n) = (l + m) + n$, $(l + m) - n = l + (m - n)$, $l - (m + n) = (l - m) - n$. Наравно, ова се правила могу извести из аксиома Абелове групе, али у дидактици математике треба их сматрати независним и интуитивно их засновати изједначавањем различитих ознака за исти број. Специјално, улога асоцијативног закона се види као средство за свођење збира од три (или више) сабирака на збир два сабирка. Дакле, сва својства сабирања и сви резултати у таблицама се могу изразити у терминима збира два сабирка.

9. Шта је Фројденталова дидактичка анализа? Често се сматра да су садржаји математике нешто једном заувек фиксирано и да наставник треба да добро научи те садржаје и да овлада вештином њиховог преношења. Да бисмо превазишли ову сувише поједностављену представу, наведимо да се сви математички садржаји јављају, углавном, у следећа три вида:

- историјском, кад их видимо онакве какви су били у тренутку њиховог стварања,
- научном, кад их видимо логички сређене како то савремени развој математике као науке захтева,
- дидактичком, кад се они налазе уобличени према потребама оних који уче.

Сходно опште прихваћеном принципу да онтогенетски развој прати филогенетски, извесно познавање историјског развоја идеја које улазе у наставне садржаје битно је за наставника, а неопходно за стручњака који се бави образовањем.

Наставник разредне наставе треба да продубљеније зна основе средњошколске математике – теорију скупова, математичку логику, бројевне системе укључујући ту и школску алгебру и то на начин који би био рекапитулација оног што је и сам учио у школи са истицањем главних идеја, док би техника остајала у другом плану. То ће такође поштрити значење математичких појмова, а што се не може постићи у развојном периоду кроз рану наставу математике.

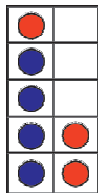
Ослањајући се на историју математике и школства, на дубоко познавање математике као науке Ханс Фројдентал у својим књигама: *H. Freudenthal, Mathematics as an Educational Task*, D. Reidel Publishing Company, 1973 и *H. Freudenthal, Weeding and Sowing*, D. Reidel Publishing Company, 1978, подвргава детаљној анализи неке од главних тема школске математике. То такво расчлањивање математичких садржаја и сугерисање њиховог дидактичког обликовања Фројдентал назива *дидактичка анализа*. Могло би се са пуним правом рећи да је дидактичка анализа основношколске математике пројекат за будућност, док се данас настава математике на том почетном нивоу налази у рукама многих „експерата“, који ту наставу третирају једнострано, не схватајући да је структурисање тих садржаја први и најважнији корак. На том почетном нивоу знање се синтетизује на основи коју чине опажање и добро усмерено процесирање опажајног материјала. А то усмеравање могу да врше само они који познају математичке садржаје на продубљенији начин и добро схватају когнитивне процесе, уважавајући све развојне факторе.

У следећој тачки овог чланка подвргнућемо дидактичкој анализи тему „блок бројева до 20“.

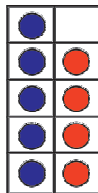
10. Блок бројева до 20. Блок бројева до 10 је, наравно, део блока бројева до 20. Тих првих десет бројева, заједно са нулом, имају фундаментални значај за изградњу декадног бројевног система, пошто се сваки природни број представља као збир производа декадних јединица и бројева из скупа $\{0, 1, \dots, 9\}$, (видети I, 5). Такође у оквиру овог првог почетног блока успоставља се значење операција сабирања и одузимања, а такође се ту формира део таблица сабирања и одузимања. Сви улази у те таблице запамћују се на спонтан начин, путем већег броја вежби (а такође ту своје место имају и иконицке представе о бројевним сликама). За збирове и разлике у оквиру блока до 10 говорићемо фигуративно да су „мали“ односно „мале“, а то знање је основа на којој се рачунају зборови и разлике у оквиру већег блока бројева до 20.

Кад се уз исту адитивну схему спарују одговарајући задаци сабирања и одузимања, то чини лакшим запамћивање разлика уз одговарајуће зборове и обратно, али је то такође истицање међузависности операција сабирања и одузимања на процедуралан начин. Један такав пример је следећа вежба:

Попуните шта се захтева



$$\begin{aligned} _ + _ &= 7 \\ _ + _ &= 7 \\ 7 - _ &= _ \\ 7 - _ &= _ \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} _ + _ &= 9 \\ _ + _ &= 9 \\ 9 - _ &= _ \\ 9 - _ &= _ \end{aligned}$$

Сл. 27

Путем већег броја оваквих вежби, обухватајући (више пута) све улазе у таблице сабирања и одузимања, уче се спонтано те таблице у оквиру бројева до 10. Одмах рецимо да је главни дидактички задатак везан за блок бројева до 20, формирање и спонтано запамћивање комплетних таблица сабирања и одузимања, а овај блок је природна целина у оквиру које се тај задатак реализује.

Сигурно ће већина деце у сваком разреду знати да броје бар до 20. Кад је циљ једно кохерентно излагање аритметике, такво знање нећемо сматрати сувишним, али нећемо га узимати ни као основу за проширење блока бројева до 10. Такву основу чиниће зборови: $10 + 1$, $10 + 2$, $\dots$, $10 + 10$ који имају успостављен смисао у оквиру тог блока — лрм-— једна група од 10 објеката и друга од 1, 2, $\dots$, 10 објеката али ти зборови немају своју вредност (тј. свој декадни запис) у оквиру тог блока. Деца науче да се ти зборови краће записују као: 11, 12, $\dots$, 20 и читају: *једанаест*, *дванаест*, $\dots$, *двадесет*, при чему наставник води рачуна да се називи ових бројева правилно изговарају, пошто у свакодневном говору често се чује један њихов овлашни тј. неправилни изговор. У складу са схватањем бројева 11, 12, $\dots$, 20 као збирова броја 10 и бројева 1, 2, $\dots$, 10 одговарајуће бројевне слике које их представљају састоје се од једне слагалице „10“ и једне друге која представља бројеве 1, 2, $\dots$, 10 (Сл. 3, I, 3). На крају једнакости

$$10 + 1 = 11, \quad 10 + 2 = 12, \quad \dots, \quad 10 + 10 = 20$$

имају као основу једначење две различите ознаке за један те исти број, па их такође можемо сматрати да су то најједноставнија сабирања у новом оквиру бројева до 20.

10.1. Правило здруживања сабирака. Кад су објекти неког скупа груписани у три његова дисјунктна подскупа A , B и C који имају, редом, l , t и n елемената, тада укупан број елемената тог скупа можемо записати у виду *троструког збира* $l + t + n$, где l зовемо *први*, t *други* а n *трећи сабирак*.

Колика је вредност тог збира, у овој почетној фази, налазило би се искључиво путем пребројавања све док се не успоставе везе са двоструким збировима. Но прво треба представу о три скупа свести на представу о адитивној схеми, а то можемо урадити на два начина: као $A \cup B$ и C или као A и $B \cup C$. Тада број елемената тог скупа записујемо као $(l + m) + n$ пратећи прву представу, а као $l + (m + n)$ пратећи другу. Једначећи ова два записа имаћемо једнакост

$$(l + m) + n = l + (m + n).$$

Ова једнакост изражава својство троструког збира које у дидактици математике називамо *правило здруживања сабирака*, а у математици као науци за то својство кажемо да представља *асоцијативни закон*.

Сваки од два израза $(l + m) + n$ и $l + (m + n)$ може се видети као збир два броја, рецимо, први од њих као збир бројева $(l + m)$ и n , а ту је $(l + m)$ први сабирак док је n други. Ово нам указује да правило здруживања сабирака има битан значај јер нам збирове три броја (или више њих) своди на збирове два броја. Говорећи језиком математике, сабирање третирамо као бинарну операцију, а кад се та операција изводи у два (или више) корака ти кораци се истичу писањем заграда.

После ове општије анализе сагледајмо како овај садржај треба да се обрађује у реалној настави у разреду. Посебно је значајно да деца почну да схватају функцију заграда, при чему се не очекује да их она и пишу и да их користе у састављању сложенијих израза. Довољно је да у почетку деца схвате заграде као команду „израчунај прво оно што је у заградама“, пратећи програмиране задатке у којима се кораци у одређеним процедурама разлажу у намери да се такве процедуре што боље разумеју. Обрада може да почне са примерима као што је овај:

Посматрај следећи скуп кружића:



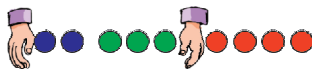
$$2 + 3 + 4$$

Сл. 28

Гледај шта пишемо кад се

плави и зелени кружићи групишу

зелени и црвени кружићи групишу



$$(2 + 3) + 4$$



$$2 + (3 + 4)$$

Сл. 29

Запис $2 + (3 + 4)$ читаиш: отворена заграда, 2 плус 3, затворена заграда, плус 4, а запис $2 + (3 + 4)$ читаиш: 2 плус, отворена заграда, 3 плус 4, затворена заграда. Пошто записи $(2 + 3) + 4$ и $2 + (3 + 4)$ означавају један те исти број, можеш да их једначиш и пишеш

$$(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4).$$

Кад се уради један број сличних примера, тада се може исказати правило да *сабирке можемо различито здруживати не мењајући вредност збира*. Кад се неко правило искаже речима на овај начин, говорићемо да је то *реторичко изражавање*, а овај термин веже овај поступак изражавања за све оне који су постојали у реторичкој алгебри. С друге стране изражавање правила кроз конкретне примере, као што би у претходном случају била замена три броја са било која друга три из блока до 20, зваћемо *процедурално изражавање*. У овом термину не треба тражити никакву негативну конотацију, (а коју прати термин процедурално учење), јер је ово изражавање слично оном које је постојало у алгебри пре него што се појавила словна алгебра Виета, Изражавање путем словних израза чини ту жељену општост, али она не мора да буде циљ наставе аритметике на овом сасвим почетном нивоу.

Да би деца у потпуности схватила функцију заграда могу им се наменити вежбе попут следеће:

Израчунај збирове

$$(2 + 3) + 5 = _ + _ = _, \quad (6 + 4) + 7 = _ + _ = _, \quad 5 + (8 + 2) = _ + _ \\ 10 + (4 + 3) = _ + _, \quad (5 + 5) + 8 = _ + _ = _, \quad \text{итд.}$$

Напоменимо да комбинујући правило здруживања сабирака са правилом размене места сабирака, можемо извести низ једнакости које уопштавају прсавило здруживања сабирака, истичући да се *то здруживање може вршити произвољним редоследом сабирака*. Заиста то показују следеће једнакости где прелазећи са једне на следећу примењујемо само једно од ова два правила.

$$(l + m) + n = l + (m + n) = l + (n + m) = (l + n) + m = (n + l) + m \\ = n + (l + m) = n + (m + l) = (n + m) + l = (m + n) + l = m + (n + l) \\ = m + (l + n) = (m + l) + n.$$

Радећи са конкретним вредностима за l , m и n , вежбе ове врсте могле би се изводити у реалној настави, уз извесну помоћ самог наставника. Али боље од тога је здруживање различитим редоследом самих скупова, при чему се записи уз два различита редоследа једначе. Наведимо један пример те врсте:

Посматрај следећи скуп кружића:



Сл. 30

Плавих кружића је 3, а црвених и зелених 5 + 2. Укупно, то је 3 + (5 + 2) кружића. Зелених и плавих кружића је 2 + 3, а црвених 5. Укупно, то је (2 + 3) + 5 кружића. Пошто записи 3 + (5 + 2) и (2 + 3) + 5 означавају један те исти број, можеш да их једначиш и пишеш

$$(2 + 3) + 5 = 3 + (5 + 2).$$

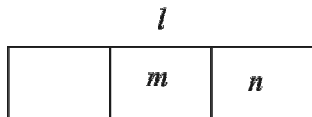
Варирајући текст и једначећи било која два здруживања три сабирка тро-струког збира и било којим редоследом, тим путем се изражава ово генералисано правило. У том облику то правило је и применљивије него што су одвојено узето, правила размене сабирака и здруживања сабирака.

10.2. Коментар. У већини програма за први разред основне школе, могу се видети теме „комутативни зако“ и „асоцијативни закон“. У својим курсевима методике математике, наставници нису никад имали укључену дидактичку анализу ових тема, па су често збуњени чињеницом да се придаје толики значај својствима која ови закони изражавају, а која им иначе изгледају као потпуно очигледна. То, наравно, повлачи и њихову несналажљивост у обради ових својстава, па једна нешто детаљнија анализа овог садржаја свакако има своје место у контексту овог чланка.

Интересантно је да се сагледа и историјски аспект и истакне да су математичари, све до почетка 19. века, и сами узимали својства комутативности и асоцијативности сабирања (и множења) као нешто што се само по себи подразумева, па их никад нису ни истицали. Прво место кад се јављају термини који означавају ова својства је чланак *F. J. Servois* у *Ann. de Math.*, 5, 1814/1815. Подсетимо да у првој половини 19. века почињу да се формирају системи аксиома на којима се темељи симболична алгебра (*G. Peacock*, *D. F. Gregory*, *A. de Morgan* и др). Користећи језик савремене алгебре, аксиоме за Абелову групу чине минимум својстава из којих се сва друга својства сабирања и одузимања могу извести. Напоменимо и то да се на основу тих аксиома разлика дефинише као збир у коме је други сабирак супротни елемент од елемента који се узима као умањеник тј. пише се $a - b = a + (-b)$. Ипак, та вештина извођења није нешто што се систематски учи у школским курсевима алгебре, а читалац који би користио аксиоме Абелове групе да изведе, рецимо, релацију $l - (m + n) = (l - m) - n$, видеће да то није неки сасвим једноставни, рутински задатак.

Пошто се комутативни и асоцијативни закони јављају као две аксиоме за Абелову групу, тиме се истиче њихова фундаментална улога, али они нису довољни да се на основу њих утемеље (изведу) сва друга својства сабирања и одузимања која би се користила за утврђивање легитимности процедура које се јављају у оквиру блока бројева до 20. А сад ћемо успоставити два својства која су изводљива из аксиома Абелове групе, али нису кад би се користили само комутативни и асоцијативни закон. Уместо апстрактнијег језика скупова, користићемо се моделима које ће чинити кутије са кликерима у боји.

У кутији се налази l кликера, њих m су плави, а њих n зелени. Сви остали су црвени.



Слика 31

Укупно има $m + n$ плавих и зелених кликера. Црвених је $l - (m + n)$. Кад се плави кликери издвоје, остаје $l - m$ кликера. Кад се и зелени кликери издвоје, остају црвени и њих је $(l - m) - n$. Кад се два записа за број црвених кликера изједначе, добија се једнакост

$$l - (m + n) = (l - m) - n.$$

Добијену једнакост називамо *правилем одузимања збира од броја*. Из природе самог модела следи претпоставка да је $l \geq m + n$, а то има смисла истицати да би изрази који се појављују у горњој једнакости били са значењем у скупу природних бројева. Запамимо да кад се неко правило изражава у виду словних израза то тада значи да оно важи за све бројеве које та слова означавају. С друге стране перманенција својстава која правила у виду словних записа изражавају је непосредна при прелазу са једног бројевног система на шири. На пример горња једнакост важиће и кад су l , m и n три рационална или три реална броја.

Изведимо сад још једно својство одузимања, користећи сличан модел оном претходном.

У кутији је l црвених и m плавих и зелених кликера, а само зелених је n .

m		
l	$m - n$	n

Слика 32

Укупно, то је $l + m$ кликера. Кад се издвоје зелени кликери, остаје $(l + m) - n$ црвених и плавих. Црвених кликера је l , а плавих је $m - n$. Црвених и плавих је $l + (m - n)$. Једначењем два записа за број црвених и плавих кликера, добија се једнакост

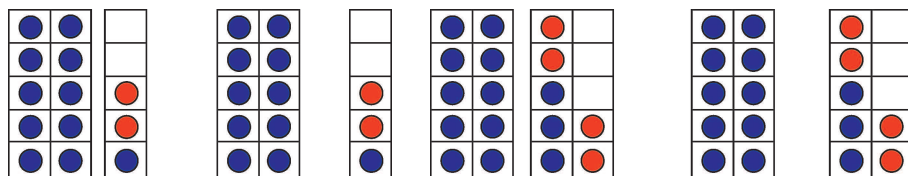
$$(l + m) - n = l + (m - n).$$

Добијену једнакост називамо *правилем одузимања броја од збира*, а из природе самог модела следи да је $m \geq n$.

Поновимо опет да провера асоцијативног закона рачунањем у неколико посебних случајева, као нпр. $(3 + 2) + 5 = 5 + 5 = 10$, $3 + (2 + 5) = 3 + 7 = 10$ итд. јесте знак потпуног неразумевања природе ових садржаја, а исто смо рекли и у Коментару, II, 8.3.

10.3. Прва права рачунања. Иако врло једноставна, прва рачунања су случајеви сабирања (одузимања) кад је први сабирак (умањеник) број између 10 и 20, а други сбирак (умањилац) једноцифрен, при чему збир (разлика) остаје такође између 10 и 20. Методе рачунања имаће као ослонац иконичке представе, а чиниће их једно „мало“ сабирање (одузимање) и једно лако сабирање са 10 као првим сабирком. Наведимо два примера таквог сабирања (одузимања).

Гледај слике и оно што је написано.



$$\begin{aligned} 11 + 2 &= 10 + (1 + 2) \\ &= 10 + 3 = 13 \\ 13 - 2 &= 10 + (3 - 2) \\ &= 10 + 1 = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13 + 4 &= 10 + (3 + 4) \\ &= 10 + 7 = 17 \\ 17 - 4 &= 10 + (7 - 4) \\ &= 10 + 3 = 13 \end{aligned}$$

Сл. 33

Увежбавање ових метода иде путем за то програмираних примера са постепеним повећањем броја бланк места која треба испунити.

Попуњавај шта треба

$$\begin{aligned} 15 + 4 &= 10 + (5 + 4) = 10 + _ = _, & 13 + 6 &= 10 + (_ + _) = 10 + _ = _, \\ &13 + 7 &= _ + (_ + _) = _ + _ = _, & \text{итд.} \\ 19 - 3 &= 10 + (9 - 3) = 10 + _ = _, & 18 - 5 &= 10 + (_ - _) = 10 + _ = _, \\ &17 - 6 &= _ + (_ - _) = _ + _ = _, & \text{итд.} \end{aligned}$$

Истицање свих међуковака води потпуном разумевању неке методе, док компресијом тих међуковака постиже се брже рачунање. Том бржем рачунању намењују се вежбе попут ове:

Рачунај збирове

$$12 + 7 = 10 + 9 = _, \quad 12 + 8 = _ + _ = _, \quad 14 + 5 = _ + _ = _, \quad \text{итд.}$$

Рачунај разлике

$$19 - 5 = 10 + 4 = _, \quad 17 - 4 = 10 + _ = _, \quad 18 - 4 = _ + _ = _, \quad \text{итд.}$$

Посматране независно од иконичких представа, ове методе би се на правилу здруживања сабирака, односно на правилу одузимања броја од збира. На пример,

$$14 + 5 = (10 + 4) + 5 = 10 + (4 + 5) = 10 + 9 = 19,$$

односно

$$18 - 6 = (10 + 8) - 6 = 10 + (8 - 6) = 10 + 2 = 12.$$

Но, такво рачунање, које није наслоњено на непосредне иконичке представе, није примерено узрасту ученика првог разреда сем кад нека метода прелази у фазу њене добре увежбаности. Па, може се поставити питање чему служе наставне теме „комутативни“ и „асоцијативни“ закон у програмима математике за тај разред. Мислимо да је то јасно истакнуто у претходном излагању, па сад то поновимо још једаред – размена места сабирака своди незгодније збирове за рачунање у којима је први сабирак мањи од другог, на оне zgodније у којима је обратно, први сабирак већи од другог. Правило здруживања сабирака своди троструке (и вишеструке)

збирове на двоструке и операцији сабирања даје бинарни карактер, а то значи да ће се сва својства сабирања изражавати у терминима двојних збирова, као што ће и сви улази у таблицу сабирања бити двојни зборови.

Најзначајнији случајеви сабирања у блоку бројева до 20 су они кад су сабирци једноцифрени бројеви, а њихов збир је већи од 10. Слично, код одузимања у овом блоку, најважнији су случајеви кад је умањеник двоцифрен број, умањилац је једноцифрен, а разлика је мања од 10. У оба ова случаја користићемо бројевне слике са плавим и црвеним кружићима које ће представљати адитивне схеме. Задатке сабирања и одузимања учинићемо динамичнијим говорећи у случају сабирања о додавању кружића, док ћемо у случају одузимања говорити о њиховом скидању.

Код ових метода сабирања и одузимања, као један корак јављаће се разлагање једноцифрених бројева на сабирке, па томе треба посветити извешан број вежби:

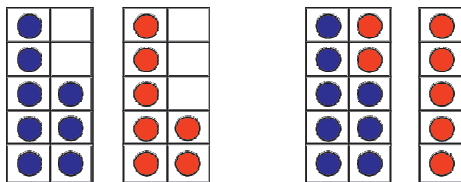
Допуњавај шта треба

$$\begin{array}{llllll} 6 = 1 + _, & 7 = 1 + _, & 8 = 1 + _, & 9 = 1 + _, & 5 = 2 + _, & 6 = 2 + _, \\ 7 = 2 + _, & 8 = 2 + _, & 9 = 2 + _, & 7 = 3 + _, & 8 = 3 + _, & 9 = 3 + _, \\ 6 = 4 + _, & 7 = 4 + _, & 9 = 5 + _, & 8 = 5 + _, & 7 = 5 + _, & 9 = 6 + _, \\ & 8 = 6 + _, & 7 = 6 + _, & \text{итд.} & & \end{array}$$

Запазимо да је разлагање на сабирке радња супротна сабирању, а уствари то је одузимање у имплицитном облику.

Узимајући један посебни пример изложићемо како тече метода сабирања:

Гледај слике и прати како рачунамо



$$8 + 7 = (8 + 2) + 5 = 10 + 5 = 15$$

Сл. 34

За разумевање али и за запамћивање појединих процедура, упутно је да се оне искажу и у *наративном облику* који не мора бити прецизно изражавање, али јесте сугестивно и сликовито. О наративним формама изражавања писао је Џ. Брунер (J. Bruner, The Culture of Education, Harvard University Press, 1996), па инспирисани његовим идејама можемо овде да размишљамо о наративним начинима изражавања садржаја аритметике.

Исказујући наративно поступак из претходног примера, наставник може да то уради овако: „Преслажемо црвене кружиће, па са њих 2 формирамо „десетку“ $8 + 2$ и још њих 5 преостају“. Може наративно да изражава и сам рачунски

поступак и да говори: „Прво додајеш 2 првом сабирку да добијеш 10, а затим додајеш преосталих 5“.

Видимо да ово сабирање иде прво до 10, па се наставља додајући оно што преостаје од другог сабирка. Па због начина како се изводи, назива се *метода сабирања са прелазом преко 10*.

Пошто се уради један број примера са слагалицама и расчлањивањем поступка на све међукораке, тада се дају вежбе са примерима без ослоња на бројевне слике за које се може претпоставити да ће се спонтано почети да формирају у уму детета у виду менталних представа. На пример:

Допуњавај шта треба

$$7 + 5 = (7 + 3) + 2 = _ + _ = _, \quad 9 + 7 = (9 + _) + _ = 10 + _ = _, \\ 8 + 4 = (_ + 2) + 2 = _ + _ = _, \quad \text{итд.}$$

На крају, дају се примери где држачи места скицирају методу, а све остало ученици сами допуњавају:

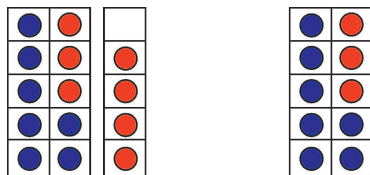
Рачунај

$$6 + 6 = (_ + _) + _ = _ + _ = _, \quad 8 + 7 = (_ + _) + _ = _ + _ = _, \\ 8 + 8 = (_ + _) + _ = _ + _ = _, \quad \text{итд.}$$

Напоменимо да је ово случај где се заиста рачуна, јер сложеније сабирање сводимо на два лакша – једно са „малим“ збиром (мањим од 10) и друго које је лако сабирање са првим сабирком 10.

Слично, методу одузимања прво ћемо илустровати на једном конкретном примеру.

Гледај слике и прати како се рачуна



$$14 - 7 = (14 - 4) - 3 = 10 - 3 = 7$$

Сл. 35

Пошто се овај поступак своди на одузимање до 10, а затим одузимање броја који преостаје од 10, он се назива *метода одузимања са прелазом преко 10*. Наставник, пратећи овај поступак, изражава га наративно: „Прво се скину 4 црвена кружића да би се добила „десетка“ $14 - 4$, а затим се скидају преостала 3“. Пратећи рачунски поступак, наставник коментарише: „Прво одузимаш 4, да добијеш 10, а затим одузимаш преостала 3“.

Пошто се ова метода увежба са примерима који су илустровани, прелази се на вежбе у којима се очекује да се иконичке представе одвијају у уму детета.

Допуњавај шта треба

$$16 - 9 = (16 - 6) - 3 = \underline{\quad} - \underline{\quad} = \underline{\quad}, \quad 15 - 8 = (15 - \underline{\quad}) - \underline{\quad} = 10 - \underline{\quad} = \underline{\quad},$$

$$14 - 6 = (\underline{\quad} - 4) - 2 = \underline{\quad} - \underline{\quad} = \underline{\quad}, \quad \text{итд.}$$

На крају долазе вежбања, где је ова метода скицирана коришћењем држача места а све остало сами ученици самостално раде:

Рачунај

$$18 - 9 = (\underline{\quad} - \underline{\quad}) - \underline{\quad} = \underline{\quad} - \underline{\quad} = \underline{\quad}, \quad 16 - 7 = (\underline{\quad} - \underline{\quad}) - \underline{\quad} = \underline{\quad} - \underline{\quad} = \underline{\quad},$$

$$14 - 7 = (\underline{\quad} - \underline{\quad}) - \underline{\quad} = \underline{\quad} - \underline{\quad} = \underline{\quad}, \quad \text{итд.}$$

Видимо да је и ово рачунање свођење тежих случајева одузимања на једно лако (са разликом 10) и једно „мало“ (у оквиру блока бројева до 10).

Вежбе које служе компресији међузорака код ових метода су попут следеће:

Рачунај брже

$$7 + 6 = 10 + 3 = \underline{\quad}, \quad 7 + 5 = 10 + \underline{\quad} = \underline{\quad}, \quad 8 + 5 = 10 + \underline{\quad} = \underline{\quad},$$

$$8 + 7 = 10 + \underline{\quad} = \underline{\quad}, \quad 8 + 8 = 10 + \underline{\quad} = \underline{\quad}, \quad 9 + 8 = 10 + \underline{\quad} = \underline{\quad}, \quad \text{итд.}$$

$$17 - 8 = 10 - 1 = \underline{\quad}, \quad 17 - 9 = 10 - \underline{\quad} = \underline{\quad}, \quad 16 - 8 = 10 - \underline{\quad} = \underline{\quad},$$

$$16 - 7 = 10 - \underline{\quad} = \underline{\quad}, \quad 15 - 8 = 10 - \underline{\quad} = \underline{\quad}, \quad 15 - 7 = 10 - \underline{\quad} = \underline{\quad}, \quad \text{итд.}$$

После ових обрада долазе и вежбе усменог рачунања при чему су посебно важни случајеви који представљају улазе у таблице сабирања и одузимања. Тим пре, што се ове таблице не уче напамет, већ се очекује спонтано запамћивање а и брзо рачунање у виду компресованог сабирања и одузимања са прелазом преко 10. Први примери за усмено рачунање треба да буду груписани, где први сабирак (умањеник) „мирује“, као нпр. $8 + 3$, $8 + 7$, $8 + 5$, итд. ($14 - 9$, $14 - 5$, $14 - 6$, итд), односно други сабирак (умањилац) „мирује“, као нпр. $6 + 5$, $9 + 5$, $7 + 5$, итд. ($13 - 6$, $11 - 6$, $15 - 6$, итд).

Кад би се ове методе заснивале на општим правилима тада би за методу сабирања преко 10 то било правило здруживања сабирака. На пример то би се радило овако:

$$8 + 7 = 8 + (2 + 5) = (8 + 2) + 5 = 10 + 5 = 15, \quad \text{итд.}$$

Слично, опште правило на коме би се заснивала метода одузимања са прелазом преко 10 је правило одузимања збира од броја. На пример, то би се радило овако:

$$16 - 9 = 16 - (6 + 3) = (16 - 6) - 3 = 10 - 3 = 7, \quad \text{итд.}$$

Такво извођење је логички потпуно на свом месту али је његова прихватљивост у реалној настави много мања. Али за наставника је добро да сагледава да сви поступци у аритметици имају своју основу у виду правила алгебре, али и да види да то нису само она правила која се у алгебри истичу као основна, већ и многа друга која су из њих изводљива. Сва та правила требало би да садржи курс дидактике математике, а ниједан их не садржи, па се она неће

моћи наћи у курсу алгебре који тако не може непосредно послужити разумевању аритметике. Управо је тачно обротно, да ће аритметика са својим правилима и процедурама утемељеним на интуицији и изражавању путем аритметичких израза и релација, допринети значењу без кога нема правог разумевања алгебре, него би то била грана математике заснована на „скупу правила без смисла“. У том погледу, записивање израза, њихово једначење и трансформисање не доприносе само кохерентнијем излагању аритметике које прати разумевање, него то ће бити значајно знање и умеће кад касније почне настава алгебре. Благовремено учење ових техника називамо *раном алгебром*, а та иновација у дидактици математике показује се да је значајна у оба случаја – за учење и аритметике и алгебре.

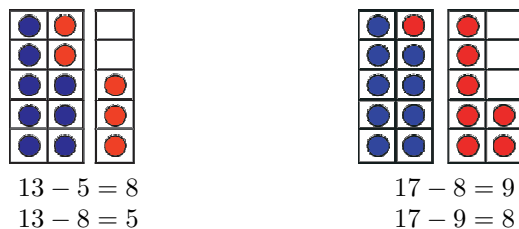
10.4. Својства и везе операција сабирања и одузимања. Све што ћемо овде излагати можемо да искажемо на следећи начин: *Кад год је једна од једнакости*

$$l + m = n, \quad m + l = n, \quad n - l = m, \quad n - m = l$$

тачна, тачне су и преостале три.

Кад проверимо да је једнакост $n - l = m$ тачна па на основу тога, без провере, узимамо да је такође тачна једнакост $n - m = l$, тако истичемо својство одузимања које се назива *правило размене места умањивоца и разлике*. Ово правило је у случају одузимања аналогно правилу о размени места сабирака код сабирања, а у реалној настави обрађује се на посебним примерима као што је овај:

Посматрај слике и прати шта се пише



Сл. 36

Наставник скреће пажњу ученицима да умањилац и разлика у првој једнакости замењују своја места у другој. У даљим примерима, испод слагалица треба да стоје непотпуне једнакости, као што су, на пример:

$$15 - 7 = \underline{\quad} \quad 14 - 8 = \underline{\quad} \quad 12 - 6 = \underline{\quad}$$

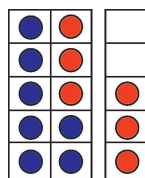
$$15 - \underline{\quad} = \underline{\quad} \quad 14 - \underline{\quad} = \underline{\quad} \quad 12 - \underline{\quad} = \underline{\quad}, \quad \text{итд.}$$

Затим се то правило исказује речима, а задају се вежбе попут ове:

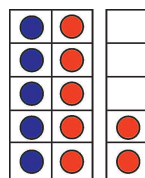
Кад израчунаш	без рачунања пишеш
$16 - 7 = \underline{\quad}$	$16 - \underline{\quad} = \underline{\quad}$
$15 - 8 = \underline{\quad}$	$15 - \underline{\quad} = \underline{\quad}, \quad \text{итд.}$

Веза сабирања са одузимањем истиче се писањем испод слагалица једне једнакости са сабирањем (одузимањем) и испод ње две друге са одузимањем (сабирањем):

Посматрај слике и прати шта се пише



$$\begin{aligned} 7 + 6 &= 13 \\ 13 - 7 &= 6 \\ 13 - 6 &= 7 \end{aligned}$$



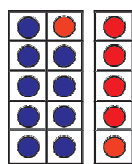
$$\begin{aligned} 12 - 7 &= 5 \\ 5 + 7 &= 12 \\ 7 + 5 &= 12 \end{aligned}$$

Сл. 37

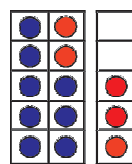
У вежбама које би следиле налазила би се једнакост која се провери (израчунавањем датог збира или разлике), а остале две се пишу без рачунања. Са повећањем степена увежбаности та вежбања иду без ослоња на бројевне слике.

Предмет вежби су и два вида одузимања у овом блоку – једно које се изводи смањивањем умањеника (а које је подесније кад је умањилац мањи од половине умањеника) и друго које се изводи допуном умањивоца (а које је подесније кад је умањилац већи од половине умањеника). Деца ће, путем вежби, осетити кад је које од ова два вида одузимања подесније, а примери треба да буду такви да се ти видови истовремено запажају илустровани један наспрам другог. Наведимо неке од таквих примера:

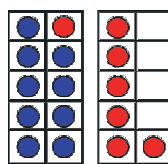
Гледај слагалице и прати како се дата одузимања изводе



$$\begin{aligned} 15 - 6 &= 10 - 1 = 9 \\ 15 - 9 &= 1 + 5 = 6 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 13 - 5 &= 10 - 2 = 8 \\ 13 - 8 &= 2 + 3 = 5 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 16 - 7 &= 10 - 1 = 9 \\ 16 - 9 &= 1 + 6 = 7 \end{aligned}$$

Сл. 38

После оваквих вежби са присуством слагалица, следиће оне без њих, али подржане држачима места помоћу којих се скицира вид одузимања, као на пример:

$$17 - 9 = _ + _ = _, \quad 17 - 8 = 10 - _ = _, \quad 14 - 8 = _ + _ = _, \quad \text{итд.}$$

На крају долазе усмене вежбе те врсте, кад ће наставник захтевати да се одузима на оба начина а да ученици говоре који им је од њих био лакши.

[Једним својим делом овај чланак је писан на основу једног заједничког рада овог аутора и др Маријане Зељић.]