

Др Милан Живановић

ТРИ КОНСТРУКТИВНА ЗАДАТКА О ПРАВОУГЛОМ ТРОУГЛУ

Нека је дат правоугли троугао ABC са правим углом код темена C , и нека је у њега уписана кружница са полупречником r и центром S као на слици 1. Према ознакама са слике имамо да је

$$(1) \quad BP + PC + CQ + QA + AR + RB = a + b + c.$$

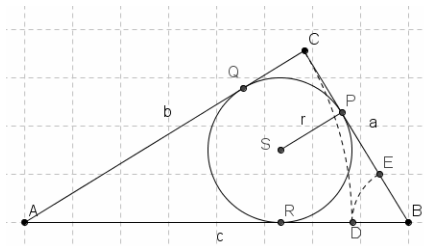
Како су по паровима једнаке дужи $PC = CQ = r$, $QA = AR$, $RB = BE$, то њиховом заменом у (1) добијамо једнакост

$$2r + 2(AR + RB) = a + b + c.$$

Решавањем по r добија се

$$(2) \quad r = \frac{a + b - c}{2}.$$

Одредимо тачке D на AB и E на BC такве да је $AD = b$ и $BE = DB$. С обзиром да је $DB = c - b$, то је $CE = a - (c - b) = a + b - c$, тј. дуж CE је једнака пречнику уписане кружнице у дати троугао. Закључујемо да се центар уписане кружнице налази на симетрали дужи CE и да је полупречник једнак половини те дужи. Ову чињеницу искористићемо у решавању следећег проблема.



Сл. 1

ПРИМЕР 1. Не користећи симетрале углова одредити центар кружнице уписане у правоугли троугао, а затим конструисати уписану кружницу.

Решење. Описаћемо само конструкцију. Нека је дат произвољан правоугли троугао ABC са правим углом код темена C .

1. Одредимо на хипотенузи AB тачку D такву да је $AD = b$, а затим на катети BC тачку E такву да је $BE = DB$.

2. Конструирамо симетралу s дужи CE и нека је P њихова пресечна тачка.

3. На симетрали s , из тачке P , нанети у унутрашњост троугла дуж PS једнаку дужи $CP = r$. Крајња тачка S ове дужи је тражени центар уписане кружнице

у дати троугао. Уписану кружницу конструишемо са центром S и полупречником SP .

Доказ следи непосредно из текста испред примера 1. Егзистенција и јединственост решења су последице теорема о једнакости дужи и јединствености симетрале дужи.

ПРИМЕР 2. Конструисати правоугли троугао ако су дате разлике хипотенузе и катета $m = c - a$ и $n = c - b$.

Решење.

Анализа. Нека је дат правоугли троугао ABC са правим углом код темена C (слика 2). Нека су даље тачке $D \in AB$, $F \in BC$ такве да је $BD = BF = n$ и $E \in AB$, $G \in AC$ такве да је $AE = AG = m$. Тада су једнаке дужи $CF = CG = DE = 2r$, где је r полупречник уписане кружнице троугла ABC . Са слике се уочава да странице троугла можемо изразити на следећи начин:

$$a = n + 2r, \quad b = m + 2r, \quad c = m + n + 2r.$$

Применом Питагорине теореме се добија једнакост

$$(m + n + 2r)^2 = (m + 2r)^2 + (n + 2r)^2,$$

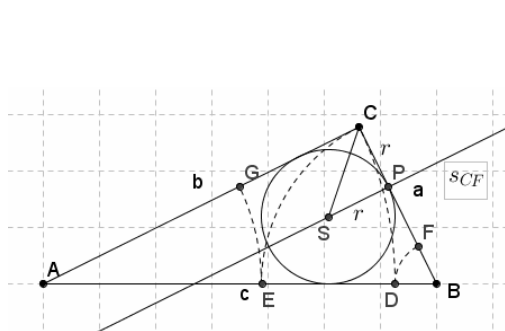
што после сређивања даје $mn = 2r^2$, одакле је

$$(3) \quad r\sqrt{2} = \sqrt{mn},$$

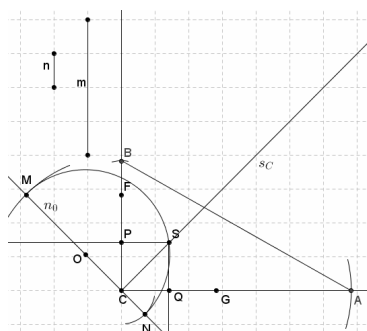
Из правоуглог троугла SPC израчунавамо да је $SC = r\sqrt{2}$. На основу тога и једнакости (3) можемо формулисати тврђење:

Растојање центра уписане кружнице правоуглог троугла од темена правоуглог угла је геометријска средина разлика хипотенузе са катетама.

Ово тврђење ћемо искористити у конструкцији правоуглог троугла под задатим условима.



Слика 2

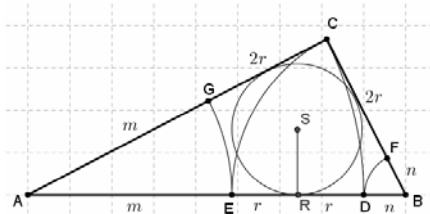


Слика 3

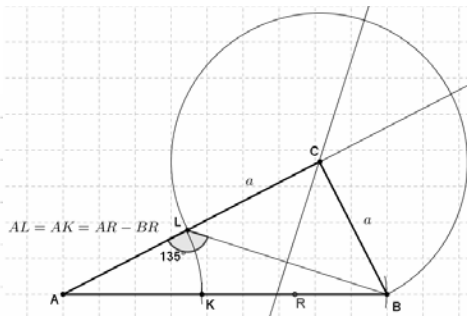
Опис конструкције (Слика 3).

1. Нека су дате дужи m и n .

2. Конструиримо прав угао и теме обележимо са C .
 3. Конструиримо симетралу s_C правог угла на којој ће се налазити центар уписане кружности у троугао.
 4. У темеу C конструиримо нормалу n_0 на симетралу s_C .
 5. На нормали n_0 са различитих страна темена конструиримо тачке M, N тако да је $CM = m$ и $CN = n$.
 6. Одредимо средиште O дужи MN .
 7. Над пречником MN конструиримо полукружницу са исте стране на којој се налази конструисани прав угао са теменом C .
 8. Пресечна тачка полукружнице и симетрале s_C је центар уписане кружности S , јер је $SC = \sqrt{mn}$.
 9. Конструиримо нормале из S на краке правог угла и добијамо тачке P, Q у којима уписана кружница додирује катете a, b . Дужи CP и CQ једнаке су полупречнику кружнице уписане у тражени троугао.
 10. Одредимо тачку F симетричну са C у односу на P и тачку G симетричну са C у односу на Q .
 11. На краку CG одредимо тачку A такву да је $C-G-A$ и $GA = m$, а на краку CF тачку такву B да је $C-F-B$ и $FB = n$. Троугао ABC је тражени троугао.
- Доказ. Угао код темена C је прав по конструкцији. По конструкцији су катете $a = 2r + n$ и $b = 2r + m$. Применом Питагорине теореме и једнакости (3) израчунавамо да је $c = 2r + m + n$. На крају се добија да за конструисани троугао важи $c - a = m$ и $c - b = n$, па он задовољава задате услове.
- Дискусија. Егзистенција и јединственост конструкције су последице јединствености конструкције дате дужи на датој полуправој и јединствености конструкције геометријске средине две дужи.
- ПРИМЕР 3. Конструисати правоугли троугао ако је дата хипотенуза и на њој додирна тачка уписане кружнице.
- Упутство. Ако је додирна тачка уписане кружнице R средиште хипотенузе, троугао је једнакокрако правоугли, па је конструкција елементарна. Зато, нека R није средиште хипотенузе као на слици 4.



Слика 4



Слика 5

Тада је према слици 5,

$$AK = |AR - RB| = |m + r - n - r| = |m - n| = |m + 2r - n - 2r| = |b - a|,$$

па се проблем своди на конструкцију правоуглог троугла са датом хипотенузом и разликом између катета. У том случају најпре треба конструисати троугао ABL : AB је дато, $AL = AK = AR - RB$ и $\angle ALB = 135^\circ$, јер је троугао LBC једнакокрак. На крају, теме C добијамо у пресеку симетрале дужи LB и полуправе AL .

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Одредити центар уписане кружнице разностраничног троугла без употребе симетрала угла.
2. Конструисати правоугли троугао ако је дат полупречник уписане кружнице и разлика хипотенузе и једне катете.
3. Конструисати правоугли троугао ако је дато растојање центра уписане кружнице од темена правог угла и разлика између хипотенузе и једне катете.
4. Доказати да се растојање OI између центара описане и уписане кружнице правоуглог троугла може израчунати по формули

$$OI^2 = \frac{(c - a)^2 + (c - b)^2}{4},$$

где су a , b катете и c хипотенуза троугла.

5. Конструисати правоугли троугао ако је дато растојање између центара описане и уписане кружнице и разлика катета троугла.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] М. Живановић, *Неке особине центра уписане кружнице троугла*, Наука и настава на универзитету, Универзитет у Источном Сарајеву, Научни скупови, 3/2, Пале, 2009.
- [2] Митровић, Огњановић, Лазаревић, Вељковић, Петковић, *Геометрија - уџбеник за 1. разред Математичке гимназије*, Круг, Београд, 2005.
- [3] http://www.dms.org.rs/seminars/seminar_2013/papers/Milan.Zivanovic.pdf

Висока школа струковних студија за образовање васпитача, Крушевац

E-mail: mzivanovic@vaspks.edu.rs