

Алија Муминагић

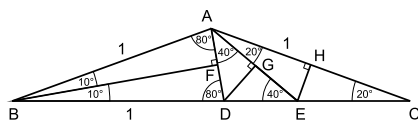
ГЕОМЕТРИЈСКИ ДОКАЗИ НЕКИХ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ЈЕДНАКОСТИ

У овом чланку дајемо геометријске доказе за неке тригонометријске једнакости.

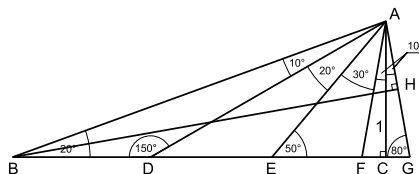
ЗАДАТАК 1. Доказати да важи једнакост

$$(1) \quad \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}.$$

Решење. Нека је троугао ABC једнакокрак, $AB = AC = 1$, $\angle ABC = \angle BCA = 20^\circ$. На основици BC одредимо тачке D и E тако да је $BD = AB = 1$ и $DE = AD$. Лако се показује да тада углови имају мјере као на сл. 1. Нека су тачке F , G и H подножја висина из тјемева B , D и E у једнакокраким троугловима ABD , ADE и AEC . Тако је $AF = \cos 80^\circ$ (из правоуглог троугла ABF), $AD = 2 \cdot AF$ (јер је троугао ABD једнакокрак) и даље: $AD = 2 \cos 80^\circ$, $AG = AD \cos 40^\circ = 2 \cos 80^\circ \cos 40^\circ$, $AE = 2 \cdot AG = 4 \cos 80^\circ \cos 40^\circ$, $AH = AE \cos 20^\circ = 4 \cos 80^\circ \cos 40^\circ \cos 20^\circ$, $AC = 2 \cdot AH = 8 \cos 80^\circ \cos 40^\circ \cos 20^\circ$ и одавде због $AC = 1$ слиједи тврђење задатка (1).



Слика 1



Слика 2

ЗАДАТАК 2. Доказати да је

$$(2) \quad \operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg} 70^\circ.$$

Решење. Нека је $\triangle ABC$ правоугли, $\angle C = 90^\circ$ и нека је $\angle A = 70^\circ$ и $AC = 1$. На катети BC одредимо тачке D , E и F тако да је $\angle BAD = 10^\circ$, $\angle DAE = 20^\circ$ и $\angle EAF = 30^\circ$. Лако слиједи да је $\angle FAC = 10^\circ$ и $\angle ABC = 20^\circ$ (сл. 2). У правоуглим троугловима ABC , ADC , AEC и AFC је, због $AC = 1$, $\operatorname{tg} 70^\circ = BC$, $\operatorname{tg} 60^\circ = DC$, $\operatorname{tg} 40^\circ = EC$ и $\operatorname{tg} 10^\circ = FC$. Дакле, да бисмо доказали једнакост

(2), видимо да треба да докажемо да је $BC = FC + EC + DC$, што је због $BC = BD + DC = FC + EC + DC$ еквивалентно са

$$(3) \quad BD = FC + EC.$$

Одредимо сада на продужетку катете BC , преко тачке C , тачку G тако да је $\angle CAG = 10^\circ$. Из подударности $\triangle FAC \cong \triangle GAC$ слиједи да је $FC = CG$. Зато је једнакост (3) еквивалентна са $BD = CG + EC$, тј. са $BD = EG$.

Синусна теорема у троуглу ABD даје

$$(4) \quad \frac{AB}{\sin 150^\circ} = \frac{BD}{\sin 10^\circ}, \quad \text{одакле је} \quad BD = \frac{AB \sin 10^\circ}{\sin 150^\circ} = 2 \cdot AB \sin 10^\circ.$$

Конструирамо висину BH у једнакокравом троуглу ABG . Тада је

$$(5) \quad \sin 10^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{AG}{2 \cdot AB}, \quad \text{одакле је} \quad AG = 2 \cdot AB \sin 10^\circ.$$

Троугао ABG је такође једнакорак, па је $AG = EG$. Одатле, користећи (4) и (5), добијамо да је $BD = EG$. Тиме је и једнакост (2) доказана.

ЗАДАТАК 3. Доказати да у (неправоуглом) троуглу важи једнакост

$$(6) \quad \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma.$$

Решење. Нека је $\triangle ABC$ неправоугли и нека је $BC = a$, $CA = b$ и $AB = c$ и нека су α , β и γ његови унутрашњи углови. Нека је O средиште описане кружнице k око $\triangle ABC$ и нека су пресјечне тачке правих AO , BO и CO с кружницом k , редом, тачке K , L и M . На тај начин је шестоугао $AMBKCL$ подијељен на 12 малих троуглова, чије површине означимо са $T_1, T_2, \dots, T_{12}$ као на сл. 3. На тој слици можемо уочити шест троуглова са пречником кружнице као једном страницом. Сваки од тих троуглова подијељен је на два мања троугла чије су површине једнаке (зашто?). Дакле, имамо:

$$\begin{aligned} T_3 + T_4 &= T_8 + T_{10}, & T_2 + T_6 &= T_3 + T_{12}, \\ T_2 + T_6 &= T_7 + T_9, & T_7 + T_8 &= T_5 + T_6, \\ T_7 + T_8 &= T_4 + T_{11}, & T_3 + T_4 &= T_1 + T_2. \end{aligned}$$

Сабирањем свих тих једнакости добијамо

$$\begin{aligned} 2(T_2 + T_3 + T_4 + T_6 + T_7 + T_8) \\ = (T_2 + T_3 + T_4 + T_6 + T_7 + T_8) + (T_1 + T_5) + (T_9 + T_{10}) + (T_{11} + T_{12}), \end{aligned}$$

тј.

$$T_2 + T_3 + T_4 + T_6 + T_7 + T_8 = (T_1 + T_5) + (T_9 + T_{10}) + (T_{11} + T_{12}),$$

што, ако са $[XYZ]$ означимо површину троугла XYZ , можемо писати као

$$(7) \quad [ABC] = [ABM] + [BCK] + [ACL].$$

Из подударности троуглова $\triangle OLC \cong \triangle OMB$ слиједи

$$(8) \quad LC = MB \text{ и слично } KC = MA \text{ и } AL = BK.$$

Познато је да је $[ABC] = \frac{abc}{4R}$ и аналогно $[ABM] = \frac{AB \cdot AM \cdot BM}{4R} = \frac{c \cdot AM \cdot BM}{4R}$,
 $[BCK] = \frac{BC \cdot CK \cdot KB}{4R} = \frac{a \cdot CK \cdot KB}{4R}$, $[ACL] = \frac{AC \cdot CL \cdot LA}{4R} = \frac{b \cdot CL \cdot LA}{4R}$,
 па једнакост (7) можемо записати као

$$(9) \quad abc = c \cdot AM \cdot BM + a \cdot CK \cdot KB + b \cdot CL \cdot LA.$$

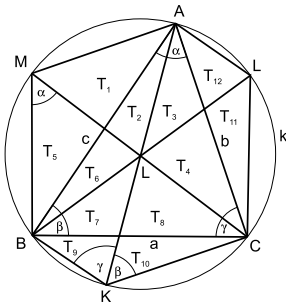
Даље је $\angle CMB = \alpha$ (као периферијски углови над луком BC), а у правоуглом $\triangle CMB$ ($\angle CBM$ је прав као угао над пречником) је

$$(10) \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} \angle CMB &= \operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{BM} = \frac{a}{BM} \text{ и слично} \\ \operatorname{tg} \angle AKC &= \operatorname{tg} \beta = \frac{AC}{KC} \stackrel{(8)}{=} \frac{b}{MA}, \quad \operatorname{tg} \angle AKB = \operatorname{tg} \gamma = \frac{AB}{BK} = \frac{c}{BK}. \end{aligned}$$

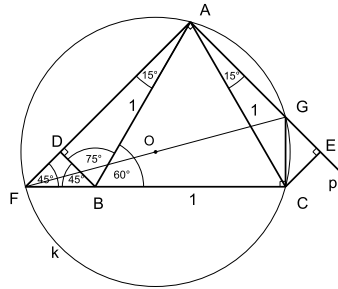
Коначно,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma &= \frac{a}{BM} + \frac{b}{MA} + \frac{c}{BK} \\ &= \frac{a \cdot MA \cdot BK + b \cdot BM \cdot BK + c \cdot BM \cdot MA}{BM \cdot MA \cdot BK} \\ &\stackrel{(8)}{=} \frac{a \cdot KC \cdot BK + b \cdot CL \cdot AL + c \cdot BM \cdot MA}{BM \cdot MA \cdot BK} \\ &\stackrel{(9)}{=} \frac{abc}{BM \cdot MA \cdot BK} = \frac{a}{BM} \cdot \frac{b}{MA} \cdot \frac{c}{BK} \\ &\stackrel{(10)}{=} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma, \end{aligned}$$

чиме је једнакост (6) доказана.



Слика 3



Слика 4

ЗАДАТАК 4. Доказати да је

$$\frac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ} = \sqrt{3}.$$

Решење. Нека је $\triangle ABC$ једнакостранични троугао ($AB = BC = CA = 1$). На продужетку стране BC , преко тачке B , одредимо тачку F тако да је $\angle FAB = 15^\circ$ (сл. 4). Нека је k кружница описана око $\triangle AFC$. Кроз тачку A поставимо праву p која кружницу k сијече у тачки G , тако да је $\angle CAG = 15^\circ$. Тада је $\angle FAG = 15^\circ + 60^\circ + 15^\circ = 90^\circ$, па је FG пречник кружнице k . Слиједи и да је $\angle FCG = 90^\circ$.

Нека је D подножје нормале из тачке B на AF . Из правоуглог $\triangle ADB$ (због $AB = 1$) је $AD = \cos 15^\circ$ и $BD = \sin 15^\circ$. Троугао DFB је једнакокрак ($\angle DFB = \angle DBF = 45^\circ$), па је $DF = BD = \sin 15^\circ$. Даље

$$(11) \quad AF = AD + DF = \cos 15^\circ + \sin 15^\circ.$$

Означимо са E подножје нормале из тачке C на праву p . У троуглу AEC је $AE = \cos 15^\circ$ и $CE = \sin 15^\circ$. Даље је $\angle GFC = \angle CAG = 15^\circ$ (као периферијски углови над луком CG), па је $\angle FGC = 75^\circ$. Због $\angle BFD = 45^\circ$ је $\angle GFA = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$, па слиједи да је $\angle AGF = 60^\circ$. Сада, из $\angle AGF + \angle FGC + \angle CGE = 180^\circ$, добијамо да је $\angle CGE = 180^\circ - 60^\circ - 75^\circ = 45^\circ$, па је $\triangle GEC$ једнакокрак. Због $AC = 1$ (из троугла ACE) је $AE = \cos 15^\circ$, $EC = GE = \sin 15^\circ$, па имамо

$$(12) \quad AG = AE - GE = \cos 15^\circ - \sin 15^\circ.$$

У правоуглом $\triangle AFG$ је

$$\sqrt{3} = \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg} \angle AGF = \frac{AF}{AG} \stackrel{(11),(12)}{=} \frac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}.$$

што је и требало доказати.

Не вјерујемо да ће неко рјешавати овакве задатке на приказани начин, уколико није изричито захтјевано геометријско рјешење (што се ипак не среће често). Ипак, мислимо да је занимљиво видјети и оваква, неуобичајена рјешења, па је зато овај чланак и написан.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Opgavetjernet 1983–1993, Jens Carstensen og matematikl erenforeningen, 1993.
- [2] J. Carstensen, A. Muminagić, *Geometrijski dokazi nekih trigonometrijskih jednakosti*, Triangle, **1**, 2 (1997), Udruženje matematicara BiH, Sarajevo, 87–88.
- [3]  . Arslanagić, *Metodička zbirka zadatka sa osnovama teorije iz elemenatne matematike*, Grafičar promet, Sarajevo, 2006.
- [4] J. Carstensen, A. Muminagić, *Geometrijski dokazi nekih trigonometrijskih jednakosti*, Matematičko-fizički list, **53**, 3 (2002/03), 210–213.

Nyk ebing F., Danmark

E-mail: fatima.muminagic@gmail.com