

Др Ђоко Г. Марковић

О КРИВИМ ДРУГОГ РЕДА

У методичком приручнику [4], приказан је низ геометријских полиформизама и њихових примјена у наставној пракси, који изазивају динамизирање наставног процеса. Ово је разумљиво ако знамо да слике представљају основне носеоце информација, које стабилизују унутрашње представе ученика, па самим тим представљају важну компоненту свеобухватног разумјевања датих феномена. Међутим, имајући на уму чињеницу да и аритметичке и алгебарске полиформности дају побољшање разумјевања појмова које проучавају, лако је закључити да кад год то наставни процес допушта, аритметичке и алгебарске полиформизме неизоставно треба везивати за геометријско презентовање проучаваних феномена. Самим тим, индукована је потреба да се у настави математике основне и средње школе уводе комбинације свих врста полиформизама. Метод координата је класичан и најпознатији такав примјер.

Рене Декарт (R. Descartes, 1596–1650) био је француски математичар који је чувен управо по томе што је претходна знања о координантним системима проширио, увео одговарајуће ознаке и тако омогућио да се многи задаци из алгебре и анализе рјешавају на једноставнији начин. Осим Декарта, готово истовремено и независно од њега, велики допринос заснивању метода координата имао је још један француски математичар-правник Пјер Ферма (P. Fermat, 1601–1665).

Овдје треба напоменути да је 17 вјекова пре њих Аполоније из Перге дефинисао криве другог реда: параболу, елипсу и хиперболу. Писано ријечима данашње симболике можемо казати да је радио са једначинама: $y^2 = px$, за параболу, $y^2 = px - \frac{p}{a}x^2$, за елипсу и $y^2 = px + \frac{p}{a}x^2$, за хиперболу.

Претеча Декарт-Фермаовог метода координата свакако је и метод француског математичара Орезма који је у XIV вијеку користио правоугле координате за графичко приказивање зависне величине y од величине x , али је умјесто савремених термина апсцисе и ординате употребљавао изразе, ширина и дужина.

Није ми намјера да овдје приказујем уобичајену тематику о Декартовом методу која се може наћи у сваком средњошколском уџбенику, приручнику или збирци задатака. Желим само да укажем на неколико суптилних примјера непознатих тим књигама, а који богате комбиновану полиформну слику и показују велике могућности примјене принципа разноврсности у непосредној наставној пракси.

ЗАДАТАК 1. Извести једначине елипсе и хиперболе на основу њихових геометријских дефиниција.

Подсетимо се најпре геометријских дефиниције ових кривих. Оне имају по двије карактеристичне тачке, два фокуса. Обиљежимо те тачке са f_1 и f_2 у равни π .

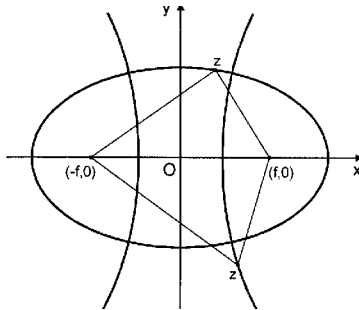
Дефиниција елипсе.

Тачка z равни π припада елипси онда и само онда када је $d(z, f_1) + d(z, f_2) = 2a$, гдје је a дати позитиван број, тј. тачка равни π припада елипси онда и само онда, када је збир одстојања од те тачке до оба фокуса константан.

Дефиниција хиперболе.

Тачка z равни π припада хиперболи онда и само онда када је $d(z, f_1) - d(z, f_2) = 2a$, гдје је a дати позитиван број, тј. тачка равни π припада хиперболи онда и само онда, када је разлика одстојања од те тачке до оба фокуса константна.

Извести једначине ових кривих значи одредити услове које задовољавају координате (x, y) тачке z , када она припада елипси или када припада хиперболи. За



Сл. 1

ову прилику одаберимо такав Декартов правоугли координатни систем да је апсциса права одређена фокусима f_1 и f_2 у равни π а ордината нормална на апсцису у средишњој тачки одсјечка $f_1 f_2$, односно пролази средиштем дужи $f_1 f_2$. Ово значи да је координатни почетак средишња тачка тог одсјечка, као на слици 1. Дакле координате фокуса су $(-f, 0)$ и $(f, 0)$, гдје је са f обиљежена бројна вриједност половине растојања између жижа f_1 и f_2 , тј. $f = \frac{1}{2}d(f_1, f_2)$.

Услови да тачка z припада елипси, односно хиперболи могу се објединити једним условом

$$(1) \quad |d(z, f_1) + \varepsilon d(z, f_2)| = 2a,$$

у којем је $\varepsilon = 1$ када је у питању елипса, односно $\varepsilon = -1$ када се ради о хиперболи. Лако је уочити да растојање између тачака z и f_1 , односно z и f_2 , износи $d(z, f_1) = \sqrt{(x+f)^2 + y^2}$, односно $d(z, f_2) = \sqrt{(x-f)^2 + y^2}$, тј.

$$d(z, f_1) = \sqrt{u + 2v}, \quad d(z, f_2) = \sqrt{u - 2v},$$

при чему је $u = x^2 + y^2 + f^2$ и $v = xf$. Имајући у виду претходне релације, услов (1) поприма облик $|\sqrt{u + 2v} + \varepsilon \sqrt{u - 2v}| = 2a$. Након квадрирања имамо да је $\varepsilon \sqrt{u^2 - 4v^2} = 2a^2 - u$, а након још једног квадрирања добијамо $u^2 - 4v^2 = 4a^4 - 4a^2 u + u^2$, тј. да је $v^2 = a^2 u - a^4$. Замјеном вриједности за u и v у претходну једначину добијамо $f^2 x^2 = a^2(x^2 + y^2 + f^2) - a^4$, односно $x^2(a^2 - f^2) + y^2 a^2 = a^2(a^2 - f^2)$, па имајући у виду да је $a \neq f$, коначно добијамо да је

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - f^2} = 1.$$

Овдје је могуће анализирати следеће варијанте: (1) $a > f$ и (2) $a < f$. Ако у првој варијанти означимо $b^2 = a^2 - f^2$, а у другој ставимо да је $b^2 = f^2 - a^2$, при чему је $b > 0$, добијамо у првом случају једначину елипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, а у другом случају имамо једначину хиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Мада изгледа као да је елиминисан услов $\varepsilon = \pm 1$ којим смо представили разлику између једначина елипсе и хиперболе, ради се о привиду, јер се та разлика сада изражава у другачијем виду. Наиме, за елипсу имамо да је $a > f$ док је за хиперболу $a < f$. Ово се може појаснити ријечима, да код елипсе збир растојања од произвољне тачке на елипси до жижа мора бити већи од растојања међу жижама ($2a > 2f$) а код хиперболе имамо да је разлика одстојања ма које тачке на хиперболи до њених фокуса увијек мања од растојања између њих ($2a < 2f$).

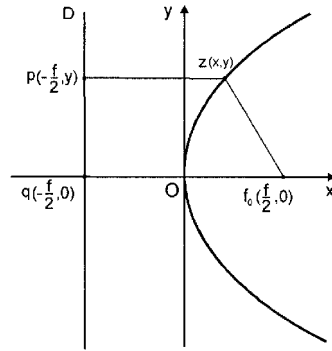
ЗАДАТАК 2. Извести једначину параболе на основу њене геометријске дефиниције.

Наведимо најпре геометријску дефиницију параболе. Парабола је задата једном карактеристичном тачком, фокусом (жижом), обиљежимо је са f_0 , и једном карактеристичном правом линијом, директрисом D . Нека је π раван одређена тачком f_0 и правом D .

Дефиниција параболе.

Тачка z равни π припада параболу онда и само онда, када је њено одстојање од тачке f_0 једнако њеном нормалном растојању до праве D .

Нека је q пресјечна тачка нормале спуштене из жиже f_0 на директрису D . Одаберимо Декартов правоугли координатни систем тако да апсцисну осу одређује права одређена тачкама q и f_0 . Као ординатну осу узмемо симетралу дужи, тј. одсјечка qf_0 . Координатни почетак представљен је средиштем тог одсјечка. У овако изабраном координатном систему координате жиже f_0 су $(f/2, 0)$ (слика 2).



Сл. 2

Ако је z тачка параболe чију једначину тражимо, а p подножје нормале спуштене из те тачке на директрису D , тада на основу дефиниције параболe имамо да је $d(z, p) = d(z, f_0)$, тј.

$$\left| x + \frac{f}{2} \right| = \sqrt{\left(x - \frac{f}{2} \right)^2 + y^2},$$

односно да је тражена једначина $2fx = y^2$. Ако ставимо да је $2f = 1/a$, једначина параболe поприма облик $x = ay^2$.

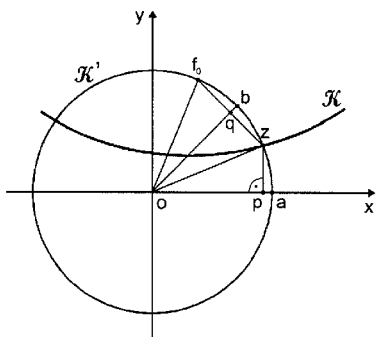
Када су у питању дефиниције елипсе, параболе и хиперболе, ево једног интересантног покушаја њиховог обједињавања универзалном формулацијом. Нека су у равни π дати тачка f_0 (жижа) и права D која је не садржи. Нека је k произвољно задати позитиван број.

Универзална дефиниција криве другог реда (елипсе, параболе и хиперболе)

Тачка z равни π припада кривој $\mathcal{K}$ онда и само онда, када је њено растојање од тачке f_0 једнако њеном ортогоналном одстојању од праве D , помножено бројем k .

Симболичку формулацију ове дефиниције записујемо једначином $d(z, f_0) = k \cdot d(z, p)$, при чему је p подножје нормале спуштене из тачке z на праву D . Очигледно да је за $k = 1$, крива $\mathcal{K}$ парабола, док је за $0 < k < 1$, крива $\mathcal{K}$ елипса, а када је $k > 1$, крива $\mathcal{K}$ постаје хипербола.

ЗАДАТАК 3. Показати да се помоћу хиперболе, чија је једначина $d(z, f_0) = kd(z, p)$, за $k = 2$, може извршити трисекција угла.



Сл. 3

Рјешење. Нека је у равни π у којој ћемо извести тражену конструкцију изабран правоугли координатни систем као на слици 3. Конструирамо кружницу $\mathcal{K}'$ са центром у координатном почетку, произвољног полупречника. Тачку пресека те кружнице и позитивне апсцисне полуосе обиљежимо са a , док са f_0 означимо било коју тачку која припада кружници $\mathcal{K}'$ у првом квадранту.

У анализи полазимо од претпоставке да је трисекција угла $\angle aof_0$ већ извршена (слика 3). Нека су z и b двије тачке на луку af_0 кружнице $\mathcal{K}'$ такве да важи $\angle aoz = \angle zob = \angle bof_0$. Обиљежимо са p подножје нормале спуштене из тачке z на апсцисну осу. Очигледно да је тада $2d(z, p) = d(z, f_0)$, што непосредно слиједи из подударности правоуглих троуглова $\triangle poz$, $\triangle qoz$ и $\triangle qof_0$ који имају подударне хипотенузе и углове $\angle roz = \angle zoq = \angle qof_0$. Дакле, тачка z припада хиперболи $\mathcal{K}$, при чему је број $k = 2$ за коју је фокус f_0 , а директриса апсцисна оса x .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] И.Ф. Шаригин, *Нужна ли школе 21-го века геометрия?*, Математическое просвещение (3-я серия), МПНИО, Москва, 2004.
- [2] Д. Струик, *Кратак преглед историје математике*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1991.
- [3] Р. Шћепановић, *Методје математике у настави анализе и алгебре*, скрипта, ПМФ, Подгорица, 2004.
- [4] Б.Г. Марковић, *Нови погледи на методикку наставе математике*, Макарије, Подгорица, 2006.
- [5] Б.Г. Марковић, *Геометријски полиформизам*, Макарије, Подгорица, 2006.

E-mail: djokogm@hotmail.com