Др Зоран Каделбург

НЕКОЛИКО НАЧИНА ЗА ИЗРАЧУНАВАЊЕ ЈЕДНОГ ПОЗНАТОГ ЗБИРА

Read Euler, read Euler. He is the master of us all.
P. S. Laplace

Сваки студент друге године математике зна (или би бар требало да зна) да је збир реда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ једнак $\frac{\pi^2}{6}$. На питање како се до тог резултата долази, већина ће вероватно одговорити „помоћу Фуријеових редова“, а неки ће умети да то и прецизно покажу (рецимо, примењујући Парсевалову једнакост на функцију $f(x)=x$ на сегменту $[-\pi,\pi]$). Мало њих, међутим, зна да то уради и на неки други начин, као и да нешто каже о занимљивом историјату овог проблема. У овом чланку ћемо зато навести три (од многих познатих) начина ирачунавања поменутог збира, почевши од оригиналног Ојлеровог из 1735. године.

1. Кратак историјат проблема

Друга половина XVII века била је време када су математичари почели интензивније да проучавају бесконачне редове. Најактивнији у том смислу био је Јакоб Бернули (Jakob Bernoulli, 1654–1705), који је први коректно доказао да хармонијски ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ дивергира. Можда је занимљиво поменути да је за то користио неједнакост

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\geqslant 1,\quad n\in\mathbf{N},$$

уместо неједнакости

$$\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}>\frac{1}{2},\quad n\in\mathbf{N},$$

која се обично данас наводи у уџбеницима.

Бернули је одмах поставио и питање о конвергенцији општијих редова облика $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ и, наравно, лако показао да за $p=2$ такав ред конвергира, користећи неједнакост

$$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)n},\qquad n>1.$$

Уједно је добио и да је 2 очигледно горње ограничење за вредност одговарајућег збира. Сви покушаји, међутим, да нађе и тачну вредност збира остали су безуспешни. Фрустриран, после дужег бављења овим проблемом, у свом познатом делу *Tractatus seriebus infinitis* („Трактат о бесконачним редовима“) из 1689. године, написао је: „Ако било ко пронађе и јави нам ово што је измакло свим нашим напорима, велика ће бити наша захвалност“ [4]. Међутим, нико од његових познаника (укључујући Лајбница (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716)) није му послао решење. Тако је Јакоб овај проблем, заједно са катедром за математику у Базелу, предао у наслеђе млађем брату Јохану (Johann Bernoulli, 1667–1748), а сам задатак је постао познат као „Базелски проблем“.

Међутим, ни Јохан није био успешнији од свог брата, те је проблем морао да сачека његовог суграђанина и, свакако, најбољег ученика, Ојлера (Leonhard Euler, 1707–1783). Млади Ојлер је вероватно био привучен могућношћу да реши задатак који носи име његовог родног града, те је врло рано почео са покушајима. Један од првих проблема са којима се сусрео била је чињеница да наведени ред врло споро конвергира, те су мале шансе да се директним рачуном одреди његова приближна вредност са иоле разумном тачношћу (збир чак првих хиљаду чланова даје само прве две тачне децимале збира (1,64)!). Први корак који је Ојлер предузео је зато био да овај збир замени неким који брже конвергира. То му је успело 1731. године када је показао да важи једнакост

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \ln^2 2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 2^n}. \tag{1}$$

Наиме, код последњег збира било је довољно сабрати само 14 чланова да би се добило 6 тачних децимала (1,644934). Сматра се да је Ојлер израчунао око 20 децимала резултата и да га је то навело да наслути тачан одговор. Резултат је објавио 1735. године и јасно је да је био веома задовољан због тога, јер је решење пропратио речима [4, 6]:

> „Сада сам, противно свим очекивањима, нашао елегантан израз за збир реда $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ итд, који је повезан са квадратуром круга ... Нашао сам да је шестострука вредност тог збира једнака квдрату обима круга пречника 1.“

Његов ментор, Јохан Бернули, написао је: *Utinam Frater supererstes effet!* („Кад би само мој брат био жив!“) [4].

Доказ који је Ојлер навео (мада у суштини тачан) свакако не би могао да задовољи савремене захтеве строгости (навешћемо тај доказ као илустрацију у наредном одељку). Чак и у XVIII веку он је изазивао подозрење, те су многи, укључујући Јохановог сина и Ојлеровог доброг пријатеља Данијела Бернулија (Daniel Bernoulli, 1700–1782), не доводећи у сумњу сам резултат, тражили коректнији доказ. Одговор је дао сам Ојлер, објављујући нови доказ, који се и данас (уз разјашњење неких детаља) може прихватити као исправан. И тај доказ ћемо навести у наредном одељку.

У наредним вековима нађено је још много доказа ове важне чињенице, укључујући поменути који користи теорију Фуријеових редова. Овде ћемо приказати само још један, чији су аутори браћа Јаглом, и који је потпуно елементаран. Заинтересовани читалац може наћи преглед других, мање или више елементарних, доказа у чланку [7].

Сам Ојлер се, наравно, није зауставио на томе, већ је наставио да испитује редове облика $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ за $p \in \mathbf{N}$, чији збирови су касније постали познати као вредности $\zeta(p)$ Риманове зета-функције за природне вредности аргумента. Нашао је начин за одређивање тих збирова за парне вредности експонента p,

$$\zeta(2q) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2q}} = (-1)^{q+1}\frac{(2\pi)^{2q}}{2(2q)!}\cdot B_{2q},$$

где су Бернулијеви бројеви B_{2q} одређени помоћу развоја

$$\frac{x}{2}\operatorname{cth}\frac{x}{2} = \frac{x}{2}\frac{e^x+1}{e^x-1} = 1 + \sum_{q=1}^{\infty}\frac{B_{2q}}{(2q)!}\,x^{2q}.$$

На пример, израчунао је и објавио 1744. године да важи:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, \quad \dots, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{26}} = \frac{2^{24}}{27!}(76977927\pi^{26}).$$

За непарне вредности експонента p, међутим, није могао скоро ништа да каже, а такво је стање ствари практично до данас. Скоро једини конкретан резултат у том смислу објавио је 1978. године Роже Апери (Roger Apéry, 1916–1994) када је доказао да је $\zeta(3) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$ ирационалан број.

2. Три доказа Ојлеровог резултата

2.1. Први Ојлеров доказ [4, 6].

Ако је $P(x)$ полином n-тог степена чији су корени $a_1, a_2, \dots, a_n$ различити од нуле, и ако је притом $P(0)=1$, тада се $P(x)$ може представити у облику

$$P(x) = \left(1-\frac{x}{a_1}\right)\left(1-\frac{x}{a_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{a_n}\right).$$

Ојлер је узео као очигледну чињеницу да се овакав закључак може применити и на збир степеног реда $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ који има бесконачно (ми бисмо данас рекли пребројиво много) нула $a_1, a_2, \dots$ (различитих од нуле). Специјално, можемо за $f(x)$ да узмемо функцију

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0,\\ 1, & x = 0,\end{cases}$$

чије су све нуле облика $a_k = k\pi$, $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Добијамо да важи једнакост

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{k\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{-k\pi}\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Ако замислимо да смо изможили све чланове последњег бесконачног производа и резултат средили по степенима од x, можемо поново да применимо аналогију са полиномима, те да изједначимо изразе уз одговарајуће степене променљиве на обема странама једнакости. Већ изједначавање коефицијената уз x^2 даје нам

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

што и јесте тражени резултат $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Препуштамо читаоцима да допуне овај Ојлеров доказ тако да постане строг у данашњем смислу речи. Посебно, Ојлеров приказ синуса у облику бесконачног производа који је овде коришћен обично се у савременим курсевима анализе такође доказује помоћу Фуријеових редова (в. нпр. [2, 5]).

2.2. Други Ојлеров доказ [4, 6].

У овом доказу користићемо следеће три чињенице чије је извођење најчешће укључено у вежбе из Анализе I и II (или би то без проблема могло бити).

(1) $\displaystyle\int_0^x \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{1}{2}\arcsin^2 x.$

(2) $\arcsin t = t + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \dfrac{t^{2n+1}}{2n+1}$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{n+1}{n+2}\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ за $n \in \mathbf{N}$ (ово се наравно изводи парцијалном интеграцијом).

Пођимо од једнакости (1) и заменимо у њој $x = 1$. Добијамо да је

$$\frac{\pi^2}{8} = \int_0^1 \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

Заменимо сада $\arcsin t$ одговарајућим степеним редом из једнакости (2), па променимо поредак интеграла и суме. (Оправданост таквог поступка Ојлер, наравно, није коментарисао. Она није сасвим тривијална јер интеграл има сингуларитет у горњој граници. Ипак, није проблем дати одговарајуће образложење, на пример, помоћу Динијевог правила.) Добија се

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{8} &= \int_0^1 \left\{\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} \cdot \frac{t^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\right\} dt \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} \int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.\end{aligned}$$

Сада, користећи рекурентну везу (3) и очигледан резултат $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 1$, лако налазимо да је

$$\int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, \quad n \in \mathbf{N},$$

па заменом у претходно добијамо да је

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Даље се лаком трансформацијом добија

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

што је еквивалентно једнакости која се доказује.

2.3. Доказ А. М. Јаглома и И. М. Јаглома [5, 8].

Доказаћемо најпре следеће помоћно тврђење.

Лема. За $n \in \mathbf{N}$ важи

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{ctg}^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

Доказ. На основу Муаврове формуле добијамо да је

$$\begin{aligned}\cos n\theta + i \sin n\theta &= (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sin^n\theta(\operatorname{ctg}\theta + i)^n \\ &= \sin^n\theta \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \operatorname{ctg}^{n-k}\theta.\end{aligned}$$

Изједначавање имагинарних делова даје

$$\sin n\theta = \sin^n\theta \left\{ \binom{n}{1} \operatorname{ctg}^{n-1}\theta - \binom{n}{3} \operatorname{ctg}^{n-3}\theta + \binom{n}{5} \operatorname{ctg}^{n-5}\theta - \cdots \right\}.$$

Специјално, ако је $n = 2m+1$ непаран број, претходна релација добија облик

$$\sin(2m+1)\theta = \sin^{2m+1}\theta P_m(\operatorname{ctg}^2\theta), \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2},$$

где је P_m полином степена m одређен са

$$P_m(x) = \binom{2m+1}{1} x^m - \binom{2m+1}{3} x^{m-1} + \binom{2m+1}{5} x^{m-2} - \cdots + (-1)^m.$$

Како је $\sin^{2m+1}\theta \neq 0$ за $0 < \theta < \pi/2$, а $\sin(2m+1)\theta$ се анулира у m различитих тачака $\theta = \frac{k\pi}{2m+1}$, $k = 1, 2, \ldots, m$, закључујемо да се $P_m(x)$ анулира у m разлчиитх тачака $x_k = \operatorname{ctg}^2 \frac{k\pi}{2m+1}$. На основу Вијетових правила следи

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname{ctg}^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \sum_{k=1}^{m} x_k = \frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} = \frac{m(2m-1)}{3}.$$

што је и требало доказати.

Пређимо на доказ основног тврђења. Полазећи од очигледне неједнакости

$$0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

прелазом на реципрочне вредности и квадрирањем, добијамо

$$\operatorname{ctg}^2 x < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Замењујући вредности $x = \dfrac{k\pi}{2n+1}$ за $k = 1, 2, \dots, n$ и сумирајући, добијамо

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{ctg}^2 \frac{k\pi}{2n+1} < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < n + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{ctg}^2 \frac{k\pi}{2n+1}.$$

На основу доказане леме, ово се своди на

$$\frac{n(2n-1)}{3} < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < n + \frac{n(2n-1)}{3}.$$

Ако сада помножимо ову двоструку неједнакост са $\dfrac{\pi^2}{4n^2}$ и пустимо да $n \to \infty$, на основу теореме о три низа добијамо жељену формулу $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

За љубитеље математичких куриозитета наведимо на крају и следеће.

Као што је већ речено, ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ није нарочито погодан за ефективно приближно израчунавање броја π, чак ни помоћу рачунара. За тако нешто се користе редови који много брже конвергирају (почев од Ојлеровог реда (1)). Актуелни светски рекорд у броју тачно одређених децимала броја π држе јапански компјутерски инжењери А. Ј. Је и Ш. Кондо који су 2011. године одредили њих 10^{13} [9]. При том су користили следећи Чудновски-Рамануџанов ред [1, 3]

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(6n)!}{(n!)^3 (3n)!} \frac{13591409 + 545140134n}{640320^{3n+3/2}}.$$

На питање зашто су то радили, одговарају: „Зато што је то π ... и зато што умемо!“

ЛИТЕРАТУРА

1. R. P. Agarwal, H. Agarwal, S. K. Sen, *Birth, growth and computation of pi to ten trillion digits*, Adv. Difference Equ. **2013**:100 (2013), doi:10.1186/1687-1847-2013-100.
2. Д. Аднађевић, З. Каделбург, *Математичка анализа II*, Круг и Математички факултет, Београд, 2011.
3. D. H. Bailey, J. M. Borwein, A. Mattingly, G. Wightwick, *The computation of previously inaccessible digits of π^2 and Catalan's constant*, Notices Amer. Math. Soc. **60**, 7 (2013), 844–854.

4. W. Dunham, *Euler, the Master of Us All*, Dolciani Mathematical Expositions, No. 22, The Mathematical Association of America.
5. P. Durren, *Invitation to Classical Analysis*, Pure and Applied Undergraduate Texts, No. 17, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
6. L. Euler, *Opera omnia*, Ser. I, Vol. 14, pp. 73–74.
7. E. L. Stark, *The series* $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$*,* $s = 2, 3, 4, \dots$ *once more*, Math. Magazine **47** (1974), 197–202.
8. А. М. Яглом, И. М. Яглом, *Элементарный вывод формул Валлиса, Лейбница и Эйлера для числа* π, Успехи мат. наук **8**:5 (57) (1953), 181–187.
9. A. J. Yee, Sh. Kondo, *5 trillion digits of* π*—new world record*, 7 Mar 2011, available at `http://www.numberworld.org/misc_runs/pi-5t/details.html`.

Математички факултет, Студентски трг 16, Београд

E-mail: `kadelbur@matf.bg.ac.rs`