

Ненад О. Весић

ДОКАЗ ЈЕДНЕ НЕЈЕДНАКОСТИ КОРИШЋЕЊЕМ ИЗВОДА

МОТИВАЦИЈА

На Математичкој олимпијади у Турској (Анталија) 2012. године у другом задатку је требало доказати да позитивни реални бројеви  $x, y$  и  $z$  задовољавају неједнакост

$$(1) \quad \sum_{cyclic} (x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} \geq 4(xy + yz + zx),$$

при чему је сума на левој страни неједнакости (1) једнака

$$(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} + (y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)} + (z+x)\sqrt{(y+z)(y+x)}.$$

Службено решење заснива се на доказаној неједнакости

$$(2) \quad (x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} \geq 2xy + yz + zx,$$

а која након квадрирања леве и десне стране и након тога пребацивања сабирака са десне на леву страну постаје еквивалентна неједнакости

$$(xy + yz + zx)(x - y)^2 \geq 0$$

која је тачна. У књизи [1] наведена су још три решења овог задатка која су видно компликованија али и интересантнија од званичног решења.

У овом чланку биће приказано решење које је слично званичном решењу овог задатка и након тога биће дато уопштење ове неједнакости на  $n$  позитивних реалних бројева.

Подсетимо се још операције  $+_n$ . Та операција примењена на целе бројеве  $z_1$  и  $z_2$  дефинисана је са  $z_1 +_n z_2 = d$ , где је  $d$  ненегативан остатак при дељењу збира  $z_1 + z_2$  са  $n$ .

Главна неједнакост која се односи на позитивне реалне бројеве  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  и која ће бити доказана у овом чланку је

$$(3) \quad \sum_{i=0}^{n-1} (x_i + x_{i+n-1})\sqrt{(x_{i+n-2} + x_i)(x_{i+n-2} + x_{i+n-1})} \geq \sum_{i=0}^{n-1} (3x_i x_{i+n-1} + x_i x_{i+n-2}).$$

ДОКАЗ НЕЈЕДНАКОСТИ (2) ПОМОЋУ ИЗВОДА

Метода доказивања неједнакости коришћењем особина првог извода функције добро је позната (видети нпр. [2] и [3]). Да бисмо неједнакост (2) доказали на тај начин, посматрајмо функцију

$$F(z) = (x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} - 2xy - yz - zx.$$

Тада је

$$F'(z) = (x+y) \frac{2z+x+y}{2\sqrt{(z+x)(z+y)}} - (x+y) = (x+y) \left( \frac{\frac{(z+x)+(z+y)}{2}}{\sqrt{(z+x)(z+y)}} - 1 \right),$$

па с обзиром на добро познат однос између аритметичке (бројилац у  $F'(z)$ ) и геометријске средине (именилац у  $F'(z)$ ) јасно следи да је  $F'(z) \geq 0$  за свако  $z > 0$ .

Приметимо још и то да је функција  $F(z)$  непрекидно диференцијабилна на читавом интервалу  $(-\min(x, y), +\infty)$ . Како је  $F(0) = (x+y)\sqrt{xy} - 2xy \geq 2(\sqrt{xy})^2 - 2xy = 0$ , то је најмања вредност функције  $F$  (због позитивности бројева  $x$  и  $y$  и односа између аритметичке и геометријске средине тих бројева) број  $F(z) \geq 0$ , чиме је неједнакост (2) доказана.

Доказ неједнакости (1) следи сабирањем неједнакости (2) примењених на сабирке у суми на левој страни неједнакости.

#### ДОКАЗ ГЛАВНЕ НЕЈЕДНАКОСТИ

Приметимо најпре да једнакост у неједнакости (2) важи онда и само онда када функција  $F(z)$  достиже минимум који је једнак 0. Тај минимум се достиже у случају да је  $F'(z_0) = 0$ . Са друге стране, први извод функције  $F$  једнак је 0 онда и само онда када је  $x = y$  због неједнакости између аритметичке и геометријске средине. Због тога, важи наредна теорема.

**ТЕОРЕМА 1.** *Позитивни реални бројеви  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  задовољавају неједнакост (3). Одговарајућа једнакост важи ако и само ако је  $x_0 = x_1 = \dots = x_{n-1} = x$ , када лева страна неједнакости (3) добија вредност  $4nx^2$ .*

**Доказ.** Као што је претходно наглашено, неједнакост (2) се своди на једнакост ако и само ако је  $x = y$ . То значи да  $k$ -ти сабирак у неједнакости (3) достиже најмању вредност једнаку  $m_k = 2x_k x_{k+n-1} + x_{k+n-1} x_{k+n-2} + x_{k+n-2} x_k$  ако и само ако је  $x_k = x_{k+n-1}$ . Сабирањем минимума  $m_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , добија се неједнакост (3).

Даље, због тога што  $k$ -ти сабирак достиже минимум ако и само ако је  $x_k = x_{k+n-1}$  сума на левој страни неједнакости достиже минимум ако и само ако је  $x_0 = x_1 = \dots = x_{n-1} = x$ . Заменом се лева страна неједнакости (3) своди на  $4nx^2$ . ■

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ш. Арсланагић, *Математичка читанка 5*, Графичар промет, Сарајево, 2013.
2. З. Каделбург, Д. Ђукић, М. Лукић, И. Матић, *Неједнакости*, св. 42, Друштво математичара Србије, Београд, 2003.
3. Д.Ј. Симјановић, Н.О. Весић, *Уопштења неких алгебарских неједнакости*, МАТ-КОЛ (Бања Лука) XIX (3) (2013), 23–29.

Природно-математички факултет, Ниш, пројекат 174012 Министарства за просвету, науку и технолошки развој Србије

E-mail: vesic.specijalac@gmail.com