НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
LIX, 1-2 (2014), 1–8

Др Владимир А. Зорич

МАТЕМАТИКА КАО ЈЕЗИК И МЕТОД

(објашњење за не баш малене)†

1. Према легенди (за чију популарност, према неким изворима, дугујемо познатом Французу Аруеу, познатијем по псеудониму Волтер[1]), на Њутнову главу пала је јабука. Пошто су се до тог времена у тој глави већ налазили и Кеплерови закони и веома много другога, резултат је испао различит од онога што се дешава кад јабука падне на друге главе.

Штошта од онога што је пристекло у математици као науци после тог догађаја, кроз минула три века постало је азбука природних наука.

Лавиринт, ако се посматра одозго, увек изгледа једноставно.

2. У намери да кажем овде нешто о математици уопште, почећу од примера који ће олакшати даље споразумевање.

Старија од Њутнове јабуке је легенда о Архимеду који голишав трчи Сиракузом и узвикује „Еурека! Еурека!“ (Нашао! Нашао!). Она има неколико варијанти. Навешћемо две, а затим учинити нека запажања и закључке.

Цитираћемо академика М. Л. Гаспарова[2].

> Реч је била ево о чему. Сиракуски тиранин Хијерон добио је од мајстора златара златну круну и хтео је да провери није ли мајстор умешао сребро у злато. Требало је поредити запремину круне и комада чистог злата исте тежине. Архимед је, спуштајући се у каду напуњену до врха

† Септембра 2014. године навршиће се 100 година од рођења професора Војина Дајовића, једног од оснивача Друштва математичара Србије и Математичке гимназије у Београду. Професор Владимир Мићић упознао је с тим професора Владимира Зорича, који је познавао професора Дајовића, и позвао га да у погодној форми узме учешће у обележавању ове годишњице и пригодној свечаности која ће се одржати у Математичкој гимназији. Договорено је да се, у преводу В. Мићића, у „Настави математике“ објави овај превод чланка, раније објављеног на руском као прилог књизи В. А. Зорич: «Математический анализ задач естествознания», МЦНМО, 2008. У наредној свесци часописа биће објављен чланак професора В. Зорича који ће да садржи успомене на професора Дајовића, као и нека запажања о математици, математичарима и математичким такмичењима. (*Редакција)*

[1] Презиме Arouet, уз прецизирање L(e) J(eun) у запису на латинском изгледа AROVETLI. Пермутацијом слова одатле је добијен псеудоним VOLTAIRE.

[2] М. Л. Гаспаров, «Занимательная Грециыа», Фортуна Лимитед, 2002, с. 362

водом и посматрајући како се прелива преко врха вода која је иститиснута његовим телом, одједном схватио да управо тако може упоредити запремине двају тела различитог облика.

Нешто унапређена варијанта састоји се у следећем[3].

Мајстору је одвојено било дато злато и сребро, који у легури образују чврст производ. Архимед је, не оштетивши круну, требало да сазна није ли мајстор део злата заменио сребром.

Нека су x_1 и x_2 одговарајуће количине злата и сребра у готовој круни. Њену тежину $x_1 + x_2 = A$ лако је измерити и проверити да ли се поклапа с укупном тежином онога што је било дато мајстору. Мајстор није будала, поклапаће се. Обесимо круну на динамометар, потопимо је у напуњену каду, покупимо изливену воду, измеримо њену запремину V и тежину P, па очитајмо и нови податак (тежину B) на ваги. Повежимо добијене податке. Коме је ово тешко, може изоставити следећих неколико редова,

Густине ρ_1 и ρ_2 (масе јединица запремине у терминима тежине на Земљи) наших драгоцених метала одавно су добро познате. Онда нам величине $x_1/\rho_1 = V_1$, $x_2/\rho_2 = V_2$ дају запремине сваког од метала у круни. Дакле, $V_1 + V_2 = V$.

Самим тим већ имамо релације

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 \qquad &= A,\\
x_1/\rho_1 + x_2/\rho_2 &= V.
\end{aligned}
$$

Ако нас је математика научила не само писати, него и решавати системе једначине облика

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2,
\end{aligned}
$$

онда ћемо наћи нама непознате x_1, x_2, испунићемо налог државе, добити извесну награду за продужење опстанка, моћи ћемо да одговарамо и на друга слична питања и, што је сигурно најважније, не осећајући земљу под собом, полетећемо по Сиракузи, понављајући „Еурека! Еурека!“. (Научници су, по правилу, слободољубив народ, али су спремни и живот дати за то да би нешто с нечим повезали.)

Ако не будемо лењи да обрадимо остале податке из експеримента, наћи ћемо да је $A - B = P$, тј. тело потопљено у воду губи у тежини онолико колика је тежина њиме истиснуте воде. (Природно, све се може поновити с другом течношћу или чак и гасом.)

Па то је управо АРХИМЕДОВ ЗАКОН!

Ово вреди више од круне Сиракуског тиранина Хијерона. Хвала му за проблем, чији побочни резултат засењује сам проблем.

[3] Можда она мање одговара доступној, високо професионалној, заносно занимљивој књизи светле успомене на Михаила Леоновича Гаспарова (1935–2005), али нама сада више одговара.

Да, сплавови, чамци, бродови пловили су и пре Архимеда. Али сад можемо пројектовати брод, можемо пре његовог поринућа у воду предвидети његову носивост. Сад можемо пројектовати и дирижабл за преношење великих конструкција кроз ваздух (при грађењу бушотина, опсерваторија) на местима која су недоступна за транспорт по земљи, итд.

3. Навели смо овај пример да бисмо на основу њега изрекли неколико речи о специфичности математике као науке. Овде нећемо покушавати да дамо дефиницију математике. Једноставно посматрамо пример и констатујемо понешто што се налази на површини.

Математика нам је омогућила да питање преведемо на неки специјални језик (некакве симболе, једнакости, …). Значи, математика има атрибуте *језика*.

Али овде постоји разлика од једноставног превода полазног питања, на пример, с грчког на руски или кинески. На основу сваког од таквих превода, с једне стране, може се како-тако реконструисати полазни текст и садржај полазног питања, а с друге стране, при таквом преводу мења се запис а питање остаје.

Прелазећи на математички текст, тј. на математички запис, ми се у потпуности лишавамо могућности да се вратимо на конкретно специјално питање, ако смо изгубили његов полазни текст. Али зато добијамо одређено математичко питање (овде је то решавање система једначина), које ће, кад буде решено, одговорити и на наше полазно специјално питање и на сва слична питања истовремено.

Математичари налазе начине (методе) решавања система једначина и многих других проблема, који на први поглед нису интересантни ни за кога осим самих математичара. Уствари, као и бројеви, они опслужују огромну сферу конкретних објеката и појава.

Дакле, математика најчешће даје не само специјални *језик* (на којем се настоји записати питање које се појавило, одбацујући све другостепено по важности), него такође и *метод* за решавање чисто математичког проблема које се појављује. Решивши га, поред осталог, добијамо одговор и на специјално питање које нас интересује.

Сад већ можемо навести и оценити следеће исказе.

Велика књига природе написана је језиком математике. (Галилеј)

Ако су означавања подесна за открића, онда се изненађујуће скраћује пут према истини. (Лајбниц)

Математика – то је уметност називати различите ствари истим именима. (Поенкаре)

Додајмо још и цитат из већ горе поменуте књиге Гаспарова.

> На Архимедовом гробу, према његовом завештању, уместо споменика приказан је цилиндар са у њега уписаном лоптом и урезан однос 3 : 2 њихових запремина, који је он открио. После стопедесет година, када је на Сицилији службовао познати римски писац Цицерон, он је још видео тај споменик, заборављен и зарастао у трње.

Тамо где је раније живео Грк Архимед већ одавно није Грчка. Ишчезавају не само гробови великана, него и целе државе и цивилизације. А Архимедов закон живи заједно с природом и свемиром. У том сједињавању је непролазна вредност и привлачност истинског знања и науке.

У математици се, наравно, могу уочити и многе друге стране. На пример, Ломоносов је не без основа приметио да „математика ум у ред доводи“. Она учи да се слуша аргумент и цени истина.

4. Математика се, уз сву своју привидну апстрактност, храни проблемима природних наука и несебично враћа плодове израсле на том плодном тлу. То је као удах и издах. Нарушавање ове равнотеже опасно је и у науци и у њеном предавању. Наука која је исушена од стране сколастика пропада.

5. И још нешто у вези с тим. Типично математичко тврђење изгледа овако:

Теорема. Ако је то и то, онда је то и то.

Исто то у другом запису: $A \implies B$ (из A следи B).

Уџбеници математике обично веома брижљиво испитују део ($\implies B$), тј. излажу, по могућности детаљно, логички беспрекоран доказ тога да B заиста следи из A.

Само веома наивни и неискусни људи, међу њима и неки математичари, могу себи дозволити да се радују таквој теореми ако сама полазна претпоставка A има мало садржаја, незанимљива је и неприродна. У сваком случају, мора се имати у виду да је A потпуно равноправни и веома битни неформални елемент математичке теореме.

Објаснићемо ово, подсетивши се једне од ретких фраза коју је, према сведочењу очевидаца, изговорио ћутљиви Гибс (творац математичких основа класичне термодинамике и статистичке механике) за време једне расправе на Јелском универзитету, где је он радио, о улози и месту математике, њеног аксиоматског метода, као и њеном међусобном дејству с физиком и природним наукама.

Гибс је устао и рекао: „Математичар може себи дозволити да претпостави све што му падне на памет, али физичара здрав смисао не сме да напусти.“

Сео је. И тиме завршио своје учешће у дискусији.

Наравно, Гибс је, не без ироније, изразио оно о чему је после пола столећа, истакнути математичар и мислилац Херман Вајл писао:

> Конструкције математичког ума су, истовремено, и слободне и неопходне. Појединачни математичар је слободан да дефинише своје појмове и уводи своје аксиоме како жели. Али је питање хоће ли он заинтересовати своје колеге математичаре за производе своје маште. Ми не можемо не осећати да неке математичке структуре, које су развијене захваљујући заједничким напорима многих научника, носе печат неопходности која нема везе са случајношћу њиховог историјског појављивања. Свако ко сагледава слику савремене алгебре биће изненађен овим узајамним допуњавањем слободе и неопходности.

Упијање од стране математике нових проблема (удах), њихово даље осмишљавање, решавање, уопштавање и на основу тога изградња нове математичке теорије (издах) – то је природни и затворени циклус функционисања ове науке. У неким историјским периодима доминира процес сакупљања конкретног материјала, у другим периодима свођење резултата и распоређивање свега на места[4] или логично сређивање и формализација[5]. Више од тога, временом се то може приметити и у појединим областима, па чак и у стваралаштву једног те истог великог математичара (који је у једном периоду могао радити и проповедати једно, а у другим периодима друго; у томе чак нема лицемерја ако се, наравно, не негира сама чињеница).

6. Етапно напредовање у науци често се остварује (или, боље рећи, обликује) на занимљив и карактеристичан начин, који се посебно блиставо испољава у њеним посебно апстрактним областима као што су теоријска физика и математика.

Замислите пешчани сат. Да би он радио, с времена на време га преврћемо „с ногу на главу“.

У математици је исто тако. Прво се добија много занимљивих нових чињеница. Проналази се међу њима нешто што је у неком смислу централно, кључно, што повезује много тога претходног. То се прихвата за полазни принцип, све се преврће с ногу на главу (на пример, прихватајући такву теорему за аксиому), и развој се наставља, ослањајућу се на овај принцип који обухвата широк круг чињеница из математике и окружења.

На пример, Њутнови закони су израсли из Галилејевих и Кеплерових открића. Али, прихватајући Њутнове законе као основу, можемо из њих добити и Кеплерове законе и много тога другог. Даљи развој физике довео је до нових, сада већ варијационих принципа механике, који укључују у себе широк круг појава и узајамних дејстава, различитих од узајамних дејстава која се описују помоћу централних сила.

У извесном смислу у тренуцима таквих преокрета дешава се промена размера. Овде се она састоји управо у промени и сажимању количине основних принципа уз истовремено проширивање поља објеката и појава које они обухватају и обједињују.

(Узгред речено, о преоптерећености наставних програма, по правилу, говоре они који нису водили рачуна о својевременој промени размера.

И још, можда, не узгред речено. Постоје два начина за богаћење: грабити имовину у руке – ратом, разбојништвом; или ствärарти вредности – свакодневним савесним радом. Тамо где се често говори о значајности, пре се ради о првом начину.

[4] На пример, на прелазу из XIX у XX век, Енциклопедија математичких наука је издата у Немачкој на иницијативу Ф. Клајна.

[5] Још увек свежи радови Н. Бурбакија у више томова.

Истакнути Холанђанин, учитељ многих физичара, Лоренц, у вези с Првим светским ратом, како сведочи Ајнштајн[6], скромно је приметио: „Срећан сам што припадам народу који је сувише мали да би чинио велике глупости“.

Говори се да је, још релативно недавно (а можда и сада) у букварима јапанске деце било написано отприлике следеће: „Наша држава је мала и сиромашна. Ми морамо много и добро радити да би она постала богатија.“

Некад заостала провинција Русије – Финска нам демонстрира делотворност поштеног рада и поштовања закона.

Индуктивни метод науке је некакао солиднији и поузданији од принципа „све, одмах и бесплатно“.)

7. Сад неколико речи о такозваној вишој математици.

Шта је карактеристично за ону вишу математику која се уобличила, условно говорећи, у радовима Њутна и Лајбница и бурно развила отада у наредна три века?

Та се математика научила да ради не само с константним величинама, него и са *процесима у развоју*. Појавио се и постепено формирао фундаментални, за науку уопште, појам функционалне зависности или *функције*.

Брзина промене било које променљиве величине и убрзање добили су одговарајућу математичку формулацију у терминима *извода*.

Појавио се нови језик и нови *рачун* (*диференцијални*, кад се на основу задате зависности тражи релативна брзина промене величине, и *интегрални*, када се решава обрнут проблем: на пример, на основу забележених брзина или убрзања тражи се положај покретног објекта, макар то била подморница).

Основе тог диференцијалног и интегралног рачуна, као таблица множења, сада су обавезне компоненте сваког природно-научног образовања, ако не и образовања уопште.

Објаснимо зашто. Ако је $x = x(t)$ закон кретања, тј. зависност координата објекта од времена, онда диференцијални рачун омогућава да се нађе његова брзина $v = x'(t)$ и убрзање $a = x''(t)$.

Ако је позната маса m и сила F која на њега делује, онда према Њутновом закону мора бити испуњена релација

$$mx'' = F;$$

то је једнакост која садржи изводе (у овом случају други извод $x''(t)$ полазне функције $x(t)$). Ако нас интересује како ће се то тело кретати под дејством силе $F(t)$, онда ћемо тражити, у овом случају, непознату зависност $x = x(t)$ која задовољава написану једначину.

Појавила се, дакле, потреба истраживања и решавања једначине новог типа – *диференцијалне једначине*.

[6] А, Эйнштейн, Собрание научных трудов, Т. 4, Наука 1967. Чланак «Г. А. Лоренц как творец и человек», С. 334.

Ово је опет чисто математички проблем (одвојен од кретања планета, еволуције звезданих система, рада нуклеарних реактора, печења хлеба, раста штедних улога у банкама, раста микроорганизама, трошкова осигурања, популације риба и других животиња, грабљиваца и њихових жртава; и тако даље и томе слично ...). Али проблем који има директне везе са свим тим појавама.

8. Дакле, кад математика гради теорију која нуди методе решавања одређене класе математичких проблема, она нам даје апарат који опслужује цео нови круг конкретних појава. Појаве су, можда, постојале и раније, као и сплавови пре Архимедовог закона. Али сад их ми разумемо боље. Тачније, ми смо изградили математички модел за њих који разумемо и умемо га, помоћу математичког апарата, у извесном степену употребити. Већ само то по правилу има такве примене које са каматом надокнађују обилне трошкове цивилизованог друштва на креду за математичаре.

Како је напоменуо Х. Вајл: „У свим природним наукама знање је утемељено на посматрањима. Али посматрање само констатује стање ствари. Како предвидети будућност? За то је неопходно посматрање објединити са математиком".

Без математике, разуме се, не би било ни Њутна, ни Максвела, ни Ајнштајна, ни Бора ... , каквим их знамо. Значи, не би било оне цивилизације чијим се плодовима ми тако радо користимо. Да би ово постало сасвим јасно, замислите на тренутак да смо ми, људи, изгубили реч, језик, моћ говора[7]. Ја не расправљам питање добро–лоше. Хоћу само да протумачим алтернативу и место математике.

9. На речено о математици додаћу, на крају, нешто веома опште. Цитираћу страницу из занимљиве, блиставе и садржајне књижице Ричарда Фајнмана „Сигурно се шалите, господине Фајнман!" (Издање Регулярная и хаотическая динамика, 2001, с. 298[8]). Радња се догађа у Шведској на дан уручења Нобелове награде. Следи цитат.

> После вечере смо прешли у просторију у којој су се заподели различити разговори. За једним столом је седела данска принцеза „Та-и-та", окружена с неколико људи. Приметио сам да за њиховим столом постоји празна столица и сео сам.
>
> Она се окренула к мени и рекла: „О! Ви сте један од добитника Нобелове награде. У којој области радите?"
>
> „У физици", одговорио сам.
>
> „О, па о томе нико ништа не зна, и због тога нећемо моћи о томе да поразговарамо."
>
> „Напротив", одговорио сам. „Ми не можемо говорити о физици због тога што неко *нешто* о њој зна. Јер, ми можемо расправљати само оно о чему нико ништа не зна. Можемо говорити о времену; можемо расправљати о социјалним проблемима; можемо разговарати о психологији;

---

[7] Можда ће за некога убедљивије звучати губитак мобилног телефона, телевизије и осталог, о чему је Сократ говорио: „Како је много ствари без којих се може опстати".

[8] Превод на српски у издању ICNT, Београд, 2011.

можемо такође расправљати о међународним финансијским пословима – о трансферу злата *не можемо* разговарати, будући да га сви разумеју – дакле, ми сви можемо говорити само о теми о којој нико ништа не зна!“

Не знам како они то раде. Постоји начин да се заузме *ледени* израз лица, и она је то *урадила*! Окренула се да би поразговарала с неким другим.

После неког времена сам схватио да су ме у потпуности искључили из разговора, због чега сам устао и пошао даље. Јапански амбасадор, који је седео за столом, скочио је и пошао за мном. „Професоре Фајнман“, рекао је он, „постоји нешто што бих желео да Вам испричам о дипломатији“.

Он се упустио у дугачку историју о томе како се млад човек у Јапану уписује на универзитет, проучава међународне односе, пошто сматра да може допринети добру своје државе. Кад пређе у другу годину, он почиње да доживљава благе наступе сумње у односу на то што изучава. По завршетку колеџа добија прво постављење у амбасади и доживљава још веће сумње у своје схватање дипломатије, док најзад не схвати да *нико ништа* не зна о међународним односима. И тада он може постати амбасадор! „Због тога, професоре Фајнман“, рекао је он, „кад следећи пут будете наводили примере тога о чему сви говоре, а нико ништа не зна, молим Вас, укључите и међународне односе!“

Показао се као веома занимљив човек, и продужили смо разговор. Мене је увек изненађивало то како се на разне начине развијају разне државе и разни људи. Казао сам амбасадору да постоји феномен који ме је увек задивљавао – то на који је начин Јапан успео да достигне тако висок степен развоја, да је почео играти толико важну улогу у свету. „Која је црта или особеност Јапанаца обезбедила ту могућност?“, питао сам.

Веома ми се допао одговор амбасадора. Он је рекао: „Ја не знам. Могу само да претпоставим, али не знам колико то одговара истини. Јапанци су веровали да је једини начин да се држава унапреди, дати својој деци боље образовање него што су га они сами имали; најважније је за њих било да се напусти положај сељака и добије образовање. Због тога су у породицама чињени огромни напори како би се деца подстицала да добро уче у школи, да би могли нешто постићи. Због тог стремљења да се стално нешто учи, кроз систем образовања су се веома лако шириле идеје из спољашњег света. Можда је баш то један од разлога тако брзог развоја Јапана“.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E–mail: vzor@mccme.ru