Петар Свирчевић

ЗАЈЕДНИЧКА АНАЛИЗА ТРИ ТВРЂЕЊА О ТРОУГЛУ

Нека су A, B, C темена троугла, a_1, b_1, c_1 дужине њима наспрамних страница, a_2, b_2, c_2 дужине висина из тих темена и коначно a_3, b_3, c_3 су дужине тежишних дужи које полазе из тих темена. Анализираћемо три тврђења исказана импликацијом

$$\big[(c_i^2 = a_i b_i) \wedge (a_i \in (0, +\infty))\big] \implies b_i \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\, a_i, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\, a_i\right), \tag{1}$$

где је $i \in \{1, 2, 3\}$. Дакле, ако вредност једне величине изаберемо произвољно из њеног природног домена, тражимо који је могући интервал за другу величину уз дате услове.

Случај 1. Ако је $i = 1$, то значи да једна страница троугла треба да буде једнака геометријској средини двеју других страница, дакле,

$$c_1^2 = a_1 b_1, \qquad a_1 \in (0, +\infty). \tag{2}$$

Уврстимо ли ово у модификовану Херонову формулу

$$P = \frac{1}{4}\left[(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)^2 - 2(a_1^4 + b_1^4 + c_1^4)\right]^{1/2}, \tag{3}$$

добијамо везу

$$P = \frac{1}{4}\left[(a_1^2 + b_1^2 + a_1 b_1)^2 - 2(a_1^4 + b_1^4 + a_1^2 b_2^2)\right]^{1/2}. \tag{4}$$

Јасно је да израз под кореном мора бити већи од нуле, па следи

$$(a_1^2 + b_1^2 + a_1 b_1)^2 - 2(a_1^4 + b_1^4 + a_1^2 b_2^2) > 0, \tag{5}$$

а ту неједнакост можемо писати у облику

$$\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^4 - 2\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^3 - \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2 - 2\left(\frac{b_1}{a_1}\right) + 1 < 0. \tag{6}$$

Заменимо ли $b_1/a_1 = x$ у претходну неједнакост, добијамо да је

$$x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 < 0.$$

Претходни симетричан полином се лако раставља на чиниоце, па се добија

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - 3x + 1) < 0,$$

што, због $x^2 + x + 1 > 0$ за свако $x \in \mathbf{R}$, важи ако и само ако је $x^2 - 3x + 1 < 0$. Решење последње неједначине је

$$x = \frac{b_1}{a_1} \in \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right),$$

чиме је дато тврђење доказано за $i = 1$.

Случај 2. Ако је $i = 2$, то значи да је у троуглу једна висина једнака геометријској средини друге две, дакле

$$c_2^2 = a_2 b_2, \qquad a_2 \in (0, +\infty). \tag{7}$$

Из познатих формула $2P = a_1 a_2 = b_1 b_2 = c_1 c_2$ за површину троугла добијамо да је

$$a_1 = \frac{2P}{a_2}, \quad b_1 = \frac{2P}{b_2}, \quad c_1 = \frac{2P}{c_2}. \tag{8}$$

Заменимо ли услове (8) у (3), добијамо везу

$$P^{-1} = \left[(a_2^{-2} + b_2^{-2} + c_2^{-2})^2 - 2(a_2^{-4} + b_2^{-4} + c_2^{-4}) \right]^{1/2},$$

а ако искористимо (7), онда имамо да је

$$P^{-1} = \left[(a_2^{-2} + b_2^{-2} + a_2^{-1} b_2^{-1})^2 - 2(a_2^{-4} + b_2^{-4} + a_2^{-2} b_2^{-2}) \right]^{1/2}.$$

Како израз под кореном мора бити већи од нуле, то из претходног следи неједнакост

$$\left[(a_2^{-1})^2 + (b_2^{-1})^2 + a_2^{-1} b_2^{-1} \right]^2 - 2 \left[(a_2^{-1})^4 + (b_2^{-1})^4 + (a_2^{-1})^2 (b_2^{-1})^2 \right] > 0,$$

а то је тип неједначине (5), па добијамо да је $b_2^{-1} \in \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} a_2^{-1}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2} a_2^{-1} \right)$. Ако искористимо да је $\left(\frac{3 \mp \sqrt{5}}{2} \right)^{-1} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, добијамо да је

$$b_2 \in \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\, a_2, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\, a_2 \right),$$

чиме је дато тврђење доказано за $i = 2$.

Случај 3. Ако је $i = 3$, то значи да је једна тежишна дуж троугла једнака геометријској средини друге две,

$$c_3^2 = a_3 b_3, \quad a_3 \in (0, +\infty). \tag{9}$$

Користећи косинусну теорему, добијамо следеће везе између тежишних дужи и страница троугла:

$$
\begin{aligned}
a_3^2 &= \frac{1}{4}(2b_1^2 + 2c_1^2 - a_1^2),\\
b_3^2 &= \frac{1}{4}(2c_1^2 + a1_1^2 - b_1^2),\\
c_3^2 &= \frac{1}{4}(2a_1^2 + 2b_1^2 - c_1^2),
\end{aligned} \tag{10}
$$

а када их сумирамо, следи веза

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = \frac{4}{3}(a_3^2 + b_3^2 + c_3^2). \tag{11}$$

Ако из једнакости (10) изразимо величине a_1^2, b_1^2, c_1^2, након њиховог квадрирања, сабирања и сређивања, добијамо релацију

$$a_1^4 + b_1^4 + c_1^4 = \frac{16}{9}(a_3^4 + b_3^4 + c_3^4). \tag{12}$$

Заменимо ли (11) и (12) у (3), следи да је

$$P = \frac{1}{3}\left[(a_3^2 + b_3^2 + c_3^2)^2 - 2(a_3^4 + b_3^3 + c_3^4)\right]^{1/2},$$

и ако искористимо (9), она добија облик

$$P = \frac{1}{3}\left[(a_3^2 + b_3^2 + a_3b_3)^2 - 2(a_3^4 + b_3^3 + a_3b_3)\right]^{1/2}. \tag{13}$$

Упоредимо ли (13) са (4), закључујемо да је

$$b_3 \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\,a_3, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\,a_3\right),$$

чиме је дато тврђење доказано и за $i = 3$.

Закључујемо да импликација (1) важи за $i \in \{1, 2, 3\}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Svirčević, *Dvije primjene simetrične jednadžbe četvrtog stupnja*, Matematičko-fizički list, br. 4, Zagreb, 2004/05.

[2] P. Svirčević, *Kumulativna formula za površinu trokuta*, Matematičko-fizički list, br. 3, Zagreb, 2008/09.

E-mail: petar.svircevic@zg.t-com.hr