Др Ђоко Г. Марковић

КОНСТРУКЦИЈЕ НЕКИХ МАЊЕ ПОЗНАТИХ ТАЧАКА У ТРОУГЛУ

1. Уводне напомене

Прича о Јакобу Штајнеру (1796–1863), сину швајцарског сељака, који је у младости био пастир и тек касније као младић научио да чита и пише, да би након тога досегао највеће врхове математичке науке и постао професор Универзитета у Берлину, веома је поучна. Ову причу неизоставно треба искористити у настави и наставити доказивањем неких његових теорема и извођењем неких његових конструкција.

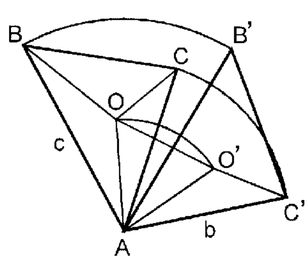
За име Јакоба Штајнера везују се познате конструкције са ограничењима, тј. конструкције у равни изведене само лењиром, ако је у тој равни задата једна утврђена кружница са својим средиштем и полупречником.

Овде ћемо размотрити конструкцију Штајнер-Фермаове тачке коју ћемо извести класичним геометријским средствима помоћу шестара и лењира.

2. Конструкција Штајнер-Фермаове тачке троугла

1. *Унутар датог оштроуглог троугла конструисати тачку тако да збир одстојања од ње до темена буде минималан.*

Решење. Нека је O произвољна тачка унутар троугла ABC. При ротацији за 60° у односу на тачку A, тачке B, C и O прелазе (пресликавају се) у тачке B', C' и O'. Пошто је $AO = AO'$ и $\angle OAO' = 60^\circ$, то је троугао AOO' једнакостранични и $AO = OO'$, а како је ротација изометријска трансформација, то је и $OC = O'C'$, па је $BO + AO + CO = BO + OO' + O'C'$ (слика 1). Дужина изломљене линије $BOO'C'$ је минимална када је ова изломљена линија дуж. Лако је уочити да је тада $\angle AOB = \angle AO'C' = \angle AOC = 120^\circ$.



Сл. 1

Конструкција Фермаове (Штајнерове) тачке састоји се у одређивању пресека ГМТ из којих се дуж AB види под углом од 120° и ГМТ из којих се дуж AC види под углом од 120°. Та конструкција се једноставно изводи тако што се над страницама AB и AC троугла ABC са спољашње стране конструишу два једнакостранична троугла око којих се опишу кружнице. Пресечна тачка те две кружнице је Фермаова тачка троугла ABC.

Решавање овог задатка пружа лепу прилику да се, сем што се могу испричати две лепе приче из историје математике о два великана математичке мисли, Пјеру Фермау и Јакобу Штајнеру, могу решити још неки сличних задаци, познати из историје математике.

3. Конструкција Брокар-Крелеве тачке троугла

2. *Нека је дат произвољан* $\triangle ABC$. *Конструисати Брокар-Крелеву тачку* Ω *тог троугла са својством* $\angle\Omega AB = \angle\Omega BC = \angle\Omega CA$.

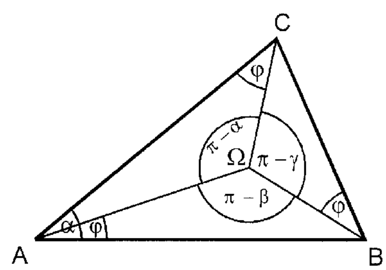
Решење. Задатак да се одреди таква тачка је решио и објавио Анри Брокар (Henri Brocard, 1854–1922) 1875. године. Међутим, проблем који носи Брокарово име, први је поставио и решио Креле (A. L. Crele) 1816. године.

При решавању овог задатка служићемо се уобичајеним ознакама.

Анализа. Претпоставимо да је тачка Ω већ одређена (слика 2). Означимо $\angle\Omega AB = \angle\Omega BC = \angle\Omega CA = \varphi$. Лако је уочити да је (1) $\angle B\Omega C = \pi-\varphi-(\gamma-\varphi) = \pi-\gamma$. Аналогно добијамо да је (2) $\angle C\Omega A = \pi-\alpha$ и (3) $\angle A\Omega B = \pi-\beta$.

Конструкција. I начин.

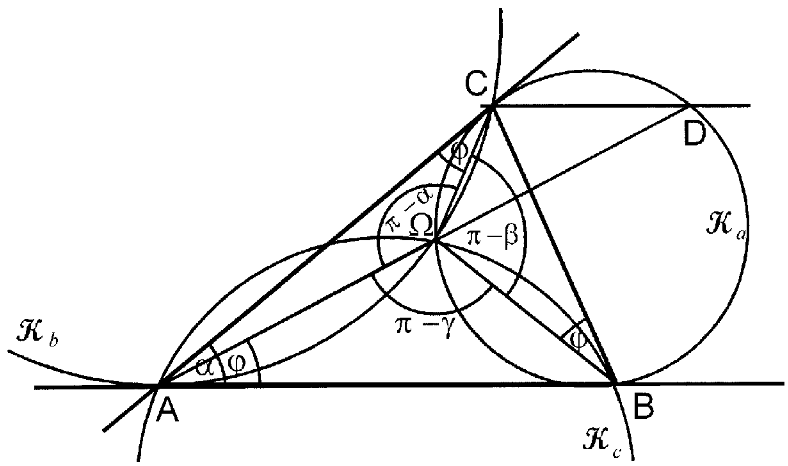
На основу ове анализе можемо једноставно конструисати Брокар-Крелеву тачку Ω. Конструишимо кружницу $\mathcal{K}_a$ која садржи теме B и додирује страницу AC у темену C. Лако је закључити да је периферијски угао кружнице $\mathcal{K}_a$ над тетивом BC једнак $\pi-\gamma$. Брокар-Крелева тачка Ω мора лежати на кружници $\mathcal{K}_a$ (слика 3). Конструишемо ли другу кружницу $\mathcal{K}_b$ која садржи теме C и тангира страницу AB у тачки A, тада је на аналогни начин претходном јасно да Брокар-Крелева тачка мора лежати и на кружници $\mathcal{K}_b$. Дакле, тражена тачка лежи у пресеку те две кружнице, тј. $\Omega = \mathcal{K}_a \cap \mathcal{K}_b$.



Сл. 2

Конструишемо ли и трећу кружницу $\mathcal{K}_c$ која садржи теме A и тангира страницу BC у тачки B, тада је на аналогни начин претходном (јер је периферијски угао над тетивом AB овде једнак $\angle A\Omega B = \pi-\beta$) јасно да Брокар-Крелева тачка мора лежати и на кружници $\mathcal{K}_c$. Овим смо уједно доказали да постоји јединствена Брокар-Крелева тачка Ω. Такође, из ових разматрања следи још једна дефиниција Брокар-Крелеве тачке.

Дефиниција. Пресек три кружнице $\mathcal{K}_a$, $\mathcal{K}_b$ и $\mathcal{K}_c$, при чему кружница $\mathcal{K}_a$ садржи теме B и додирује страницу AC троугла ABC у темену C, кружница $\mathcal{K}_b$ садржи теме C и тангира страницу AB у тачки A и кружница $\mathcal{K}_c$ садржи теме A и тангира страницу BC у тачки B, јесте Брокар-Крелева тачка троугла ABC.



Слика 3

II начин. Конструишимо најпре једну од поменуте три кружнице, нпр. $\mathcal{K}_a$ (слика 3). Права која садржи теме C и паралелна је са AB сече кружницу $\mathcal{K}_a$ у тачки D. Права AD сече кружницу $\mathcal{K}_a$ у тачки Ω. Ако означимо $\angle\Omega AB = \varphi$, тада је $\angle\Omega DC = \angle\Omega AB = \varphi$. Такође имамо да је и $\angle\Omega BC = \angle\Omega DC = \varphi$, јер се ту ради о периферијском углу кружице $\mathcal{K}_a$ над тетивом ΩC. Али и $\angle\Omega CA$, који заклапају тангента AC и тетива ΩC у крајњој тачки C те тетиве једнак је $\angle\Omega DC = \varphi$. Дакле то је баш тражени угао, а тачка Ω је тражена тачка.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Струик, *Кратак преглед историје математике*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1991.

[2] Ђ.Г. Марковић, *Геометријски полиформизам*, Макарије, Подгорица, 2006.

[3] Ђ.Г. Марковић, *Нови погледи на методику наставе математике*, Макарије, Подгорица, 2008.

E-mail: djokogm@hotmail.com