Љубиша Динић

ОБИМ КРУГА (КРУЖНИЦЕ)

Час обраде новог градива у ОШ „Ћеле кула“ у Нишу

Уводни део часа

Подсетимо ученике да смо на почетку седмог разреда учили Питагорину теорему (ПТ). Такође смо, у петом разреду, учили дефиницију круга и кружнице, а непосредно пре ове лекције обрађује се многоугао и дефинише шта је то правилан многоугао. Знамо да се ПТ може применити за изражавање странице правилног многоугла у функцији полупречника описаног, односно уписаног круга у тај многоугао.

Питање за подсећање: Када кажемо да је многоугао правилан?

Очекивани одговор: Многоугао је правилан када има све странице подударне и све унутрашње углове једнаке.

П. Како дефинишемо кружницу и круг?

О. Скуп тачака равни једнако удаљених од једне сталне тачке те равни назива се кружница. Скуп тачака равни мање или једнако удаљених од једне сталне тачке те равни назива се круг.

П. Како се зову та стална тачка и поменуто растојање? Како обично означавамо то растојање?

О. Стална тачка се зове центар кружнице (круга), а то растојање је њихов полупречник и обично се означава са r.

П. Како гласи Питагорина теорема?

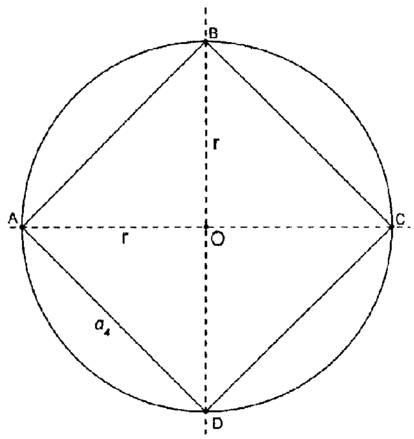
О. Квадрат над хипотенузом правоуглог троугла једнак је збиру квадрата над његовим катетама.

Главни део часа

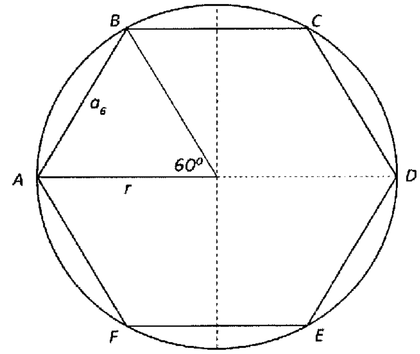
Задатак 1. Изразити обим правилног четвороугла (квадрата) у функцији полупречника описане кружнице тог квадрата. Одредити однос обима квадрата према пречнику те кружнице.

Наставник црта слику уписаног квадрата у кружницу, слика 1. Затим ученици у свескама рачунају и добијају да је страница $a_4 = r\sqrt{2}$, а обим $O_4 = 4a_4 = 4r\sqrt{2}$, односно ако узмемо да је $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, $O_4 \approx 5{,}64\,r$. Однос обима квадрата и пречника је $O_4 : 2r = 4r\sqrt{2} : 2r \approx 2{,}82$.

Задатак 2. Изразити обим правилног шестоугла у функцији полупречника описане кружнице тог шестоугла. Одредити однос обима квадрата према пречнику те кружнице.



Слика 1



Слика 2

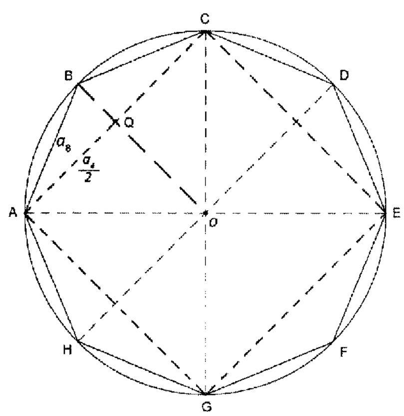
Наставник црта слику уписаног правилног шестоугла у кружницу, слика 2. Ученици одмах налазе да је страница шестоугла $a_6 = r$, а обим $O_6 = 6a_6 = 6r$. Однос обима правилног шестоугла и пречника круга је $O_6 : 2r = 6r : 2r = 3$.

Задатак 3. Изразити обим правилног осмоугла у функцији полупречника описане кружнице тог осмоугла. Одредити однос обима осмоугла према пречнику те кружнице.

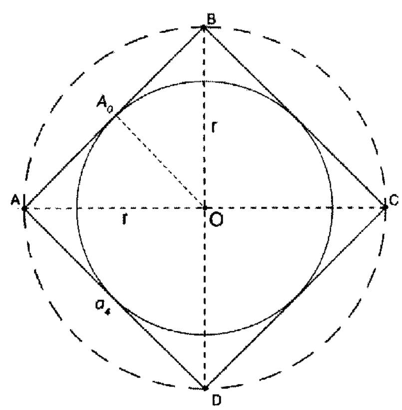
Наставник црта слику уписаног правилног осмоугла у кружницу, слика 3. Затим одређује његову страницу на следећи начин. Из троугла AOC је $AQ = \dfrac{a_4}{2} = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$, а из троугла AQB је

$$a_8^2 = \left(\frac{a_4}{2}\right)^2 + \left(r - \frac{a_4}{2}\right)^2 = \left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(r - \frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2 = r^2(2-\sqrt{2}),$$

па је $a_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Обим правилног осмоугла је $O_8 = 8a_8$, па је $O_8 : 2r = 8r\sqrt{2-\sqrt{2}} : 2r = 4\sqrt{2-\sqrt{2}} \approx 3{,}07$.



Слика 3

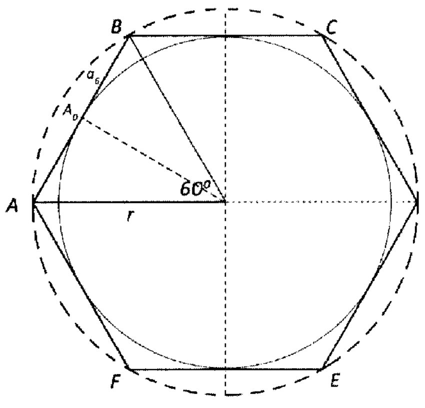


Слика 4

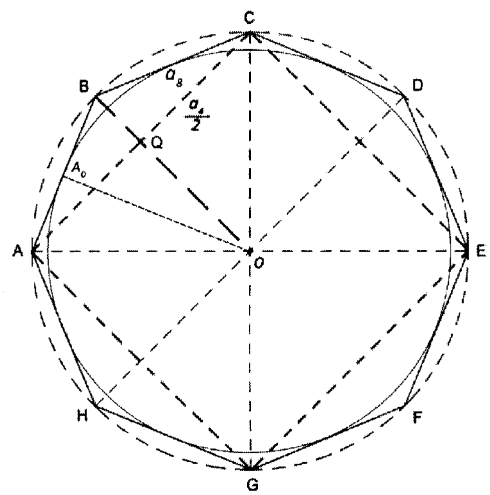
Наставник затим објашњава да се сличним поступком може добити да за страницу правилног дванаестоугла уписаног у круг полупречника r важи $a_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$, те да је обим тог дванаестоугла $O_{12} = 12r\sqrt{2-\sqrt{3}}$, а његов однос према пречнику круга $O_{12} : 2r \approx 3{,}12$.

Нађимо сада односе између обима наведених многоуглова и полупречника r њихових уписаних кружница. Посматрајмо најпре слику 4. Однос обима квадрата и пречника уписаног круга је $O_4 : 2r = 8r : 2r = 4$.

Однос обима правилног шестоугла (слика 5) и пречника њему уписане кружнице је $O_6 : 2r = 4r\sqrt{3} : 2r = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$.



Слика 5



Слика 6

Посматрајмо сада слику 6. За површине делтоида $ABCO$ и троугла ABO, где је $A_0O = r$ лако уочавамо да је $P_{ABCO} = 2P_{ABO}$, одакле се налази $a_8 = 2r(\sqrt{2}-1)$. Однос обима правилног осмоугла и пречника уписане кружнице је $O_8 : 2r = 16r(\sqrt{2}-1) : 2r = 8(\sqrt{2}-1) \approx 3{,}28$.

Најзад, сличним поступком се може добити да за правилни дванаестоугао важи $O_{12} : 2r = 12(2-\sqrt{3}) \approx 3{,}24$.

Овај поступак би се могао наставити са 16-оуглом, 24-оуглом, ... Обим O круга (кружнице) мора бити већи од обима било којег њему уписаног многоугла, а мањи од обима било којег њему описаног многоугла. Дакле, мора да важи

$$2{,}82 < 3 < 3{,}07 < 3{,}12 < \cdots < \frac{O}{2r} < \cdots < 3{,}24 < 3{,}28 < 3{,}46 < 4.$$

Закључујемо да однос $\dfrac{O}{2r}$ мора бити неки број који задовољава претходне неједнакости. Рачунањем обима правилних многоуглова са све већим бројем страница, може се још више смањити разлика између наведених односа. Показује се да је број који задовољава све те неједнакости приближно једнак

$$3{,}14159\ldots$$

Тај број означава се грчким словом π (пи); показује се да је он ирационалан (дакле, има бесконачно много децимала и оне се не понављају периодично). Ми ћемо најчешће као приближну вредност овог броја узимати $\pi \approx 3{,}14$ или $\pi \approx \dfrac{22}{7}$, што је вредност коју је добио велики старогрчки математичар Архимед.

Можемо закључити да је однос обима и пречника *било ког* круга једнак π, тј. да се обим круга (кружнице) полупречника r израчунава по формули

$$\boxed{O = 2r\pi}$$

Завршни део часа

Урадићемо сада неколико задатака.

1. Израчунај обим круга чији је пречник 14 cm. Узети да је $\pi \approx \dfrac{22}{7}$. [Решење: $O \approx 44\,\mathrm{cm}$]
2. Израчунај полупречник круга чији је обим $54\pi\,\mathrm{cm}$. [Решење: $r = 27\,\mathrm{cm}$].
3. Полупречник точка аутомобила је 25 cm. Колико обртаја направи тај точак на путу од 1 km? [Решење: $O = 0{,}5\pi\,\mathrm{m} \approx 1{,}57\,\mathrm{m}$, $n \approx 637$.]

За домаћи дати задатке из уџбеника или збирке које наставник користи.

Захваљујем се на урађеним сликама дипл. инг Драгану Јовановићу, асистенту Машинског факултета у Нишу, и Владимиру Милосављевићу, студенту Високе техничке школе у Нишу.

ОШ „Ћеле кула“, Ниш
E-mail: ljubadinic@gmail.com