Душан Ј. Симјановић, Бранимир В. Лапчевић

ДЕСЕТ ЗАНИМЉИВИХ ЗАДАТАКА О БРОЈУ 2014

На такмичењима из математике се често срећу задаци у којима се јавља број текуће године. Руковођени тиме, кроз рад са надареним ученицима, аутори су користећи литературу [1–9] осмислили задатке у чијим формулацијама се појављује број 2014. Надамо се да ће се ученицима и њиховим професорима допасти задаци и идеје за њихово решавање који су представљени у овом раду. Почетни задаци су лакши, док у наставку следе нешто компликованији задаци, достојни републичког такмичења.

Задатак 1. *Одредити природне бројеве* $a, b, c, \ldots, m, n, k$ *тако да је*

$$a+b+c+\ldots+m+n+k=abc\cdot\ldots\cdot mnk=2014.$$

Решење. Како је $2014=2\cdot 19\cdot 53$, тражено представљање је

$$2+19+53+1+1+\ldots+1+1=2\cdot 19\cdot 53\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1\cdot 1.$$

Број 1 се у претходној једнакости јавља 1940 пута.

Задатак 2. *Доказати да је*

$$2014^{2014}+2014\equiv_{916370} 0.$$

Решење. Приметимо да је $916370=2\cdot 5\cdot 7\cdot 13\cdot 19\cdot 53$. Како је

$$2014^{2014}+2014=2014\cdot(2014^{2013}+1)$$

и $2014=2\cdot 19\cdot 53$, јасно је да је број $2014^{2014}+2014$ дељив са 2, 19 и 53. Како је још и

$$2014^{2013}+1\equiv_5(-1)^{2013}+1\equiv_5 0,$$

то је број $2014^{2014}+2014$ дељив и са 5. Слично, из

$$2014^{2013}+1\equiv_{13}(-1)^{2013}+1\equiv_{13} 0,$$

закључујемо да је број $2014^{2014}+2014$ дељив и са 13. Даље, како је $2014\equiv_7 -2$ и $(-2)^3\equiv_7 -1$, имамо да је

$$2014^{2013}+1\equiv_7(-2)^{2013}+1\equiv_7(-2)^{3\cdot 671}+1\equiv_7(-1)^{671}+1\equiv_7 0,$$

па следи да је број $2014^{2014}+2014$ дељив и са 7. Одатле, како су бројеви 2, 5, 7, 13, 19 и 53 узајамно прости, закључујемо да је број $2014^{2014}+2014$ дељив са $2\cdot 5\cdot 7\cdot 13\cdot 19\cdot 53=916370$.

Задатак 3. *Дат је низ реалних бројева тако да је сваки члан тог низа, почев од другог једнак производу његова два суседна члана. Производ првих* 17 *чланова је* 4, *а производ првих* 28 *чланова је* 48. *Одредити производ првих* 2014 *чланова тог низа.*

Решење. Означимо са a први и са b трећи члан тог низа. На основу услова задатка јасно је да су a и b бројеви различити од 0. Затим, закључујемо да је дати низ облика

$$a,\ ab,\ b,\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{ab},\ \frac{1}{b},\ a,\ ab,\ b,\ \ldots$$

Дакле, низ је периодичан са периодом дужине 6. Приметимо да је производ првих 6 чланова једнак 1, јер је

$$a\cdot ab\cdot b\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{ab}\cdot\frac{1}{b}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}=1.$$

Штавише, на основу претходне чињенице следи да је производ сваких 6 узастопних чланова једнак 1.

Како је производ првих 17 чланова једнак 4 и $17=2\cdot 6+5$, закључујемо да је

$$a\cdot ab\cdot b\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{ab}=\frac{a^2b^2}{a^2b}=b=4\ .$$

Како је производ првих 28 чланова једнак 48 и $28=4\cdot 6+4$, закључујемо да је

$$a\cdot ab\cdot b\cdot\frac{1}{a}=\frac{a^2b^2}{a}=ab^2=48,\ \text{односно како је } b=4,$$
$$16a=48,\ \text{односно } a=3.$$

Коначно, како је $2014=6\cdot 335+4$, закључујемо да је производ првих 2014 чланова низа једнак

$$a\cdot ab\cdot b\cdot\frac{1}{a}=ab^2=3\cdot 4^2=48.$$

Задатак 4. *Да ли постоји комплексан број z такав да тачке одређене бројевима* 1, z^{2013} *и* z^{2014} *образују темена правоуглог троугла?*

Решење. Нека је $|z|=1$. Тада је $|z^{2013}|=|z|^{2013}=1$ и $|z^{2014}|=|z|^{2014}=1$, односно тачке које одговарају бројевима z^{2013} и z^{2014} се налазе на јединичној кружници. Ако нађемо број z такав да је $z^{2013}=-1$ и $z^{2014}\neq\pm 1$, добићемо правоугли троугао чија су темена тачке одређене бројевима 1, z^{2013} и z^{2014}, а прав угао ће бити код темена z^{2014}.

Нека је $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$|z|=1;\ \ z^3=-1,\ \text{ па је } z^{2013}=(z^3)^{671}=(-1)^{671}=-1$$

и $z^{2014}=z^{2013}\cdot z=-z=-\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\neq\pm 1$, односно $z=\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ је тражени комплексан број.

Задатак 5. *Одредити факторизацију најмањег природног броја који има тачно* 2014 *различитих делилаца.*

Решење. Нека је n природан број и

$$n = {p_1}^{\alpha_1} {p_2}^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot {p_k}^{\alpha_k}$$

његова канонска факторизација. Број делилаца броја n је

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_k + 1).$$

Како је $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$, могућа су следећа представљања броја 2014:

1. $2014 = 2014$,
2. $2014 = 2 \cdot 1007$,
3. $2014 = 19 \cdot 106$,
4. $2014 = 38 \cdot 53$,
5. $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$.

Сваком од ових представљања одговара по један најмањи природни број са тачно 2014 различитих делилаца. Њихове факторизације су:

1. $n_1 = 2^{2013}$,
2. $n_2 = 2^{1006} \cdot 3$,
3. $n_3 = 2^{105} \cdot 3^{18}$,
4. $n_4 = 2^{52} \cdot 3^{37}$,
5. $n_5 = 2^{52} \cdot 3^{18} \cdot 5$.

Лако се утврђује да је број n_5 најмањи од ових бројева. Дакле факторизација најмањег природног броја који има тачно 2014 различитих делилаца је $2^{52} \cdot 3^{18} \cdot 5$.

Задатак 6. *Доказати да се број* $\underbrace{11\ldots1}_{2014}\underbrace{22\ldots2}_{2014}$ *може написати као производ два узастопна природна броја.*

Решење. $\underbrace{11\ldots1}_{2014}\underbrace{22\ldots2}_{2014} = \underbrace{11\ldots1}_{2014} \cdot 10^{2014} + 2 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{2014} =$

$$= \frac{10^{2014}-1}{9} \cdot 10^{2014} + 2 \cdot \frac{10^{2014}-1}{9} = \frac{(10^{2014}-1)(10^{2014}+2)}{9} =$$

$$= \frac{10^{2014}-1}{3} \cdot \frac{10^{2014}+2}{3} = \underbrace{33\ldots3}_{2014} \cdot \underbrace{33\ldots3}_{2013}4 .$$

Задатак 7. *Наћи највећи природан број k за који важи*

$$2013^k \mid (2012^{2013^{2014}} + 2014^{2013^{2012}}).$$

Решење. Означимо $a = 2013$. Циљ је одредити највећи природан број k за који

$$a^k \mid ((a-1)^{a^{a+1}} + (a+1)^{a^{a-1}}).$$

Како је a непарно, закључујемо да:

$(a-1)^{a^{a+1}}$ даје остатак -1 при дељењу са a,

$(a+1)^{a^{a-1}}$ даје остатак 1 при дељењу са a.

Зато ћемо потражити највеће степене броја a који деле $(a-1)^{a^{a+1}}+1$ и $(a+1)^{a^{a-1}}-1$. Мањи од ових степена, уколико буду различити, биће тражено k.

Докажимо да за свако $n \in \mathbf{N}$ постоје S_n и t_n тако да важи

$$(*) \qquad (1+a)^{a^n} = 1 + S_n \cdot a^{n+1} \ \text{ и } \ a \nmid S_n,$$

$$(**) \qquad (a-1)^{a^n} = -1 + t_n \cdot a^{n+1} \ \text{ и } \ a \nmid t_n.$$

$$\text{За } n=1: \quad (1+a)^a = 1 + \binom{a}{1} \cdot a + \binom{a}{2} \cdot a^2 + \cdots + \binom{a}{a} \cdot a^a$$
$$= 1 + a^2\Big(1 + \binom{a}{2} + \binom{a}{3}a + \cdots\Big) = 1 + S_1 \cdot a^2.$$

Како је a непарно, $a \mid \binom{a}{2}$ и $a \nmid S_1$, где је $S_1 = 1 + \binom{a}{2} + \binom{a}{3}a + \cdots$.

Ако тврђење важи за неко n, имамо да је

$$(a+1)^{a^{n+1}} = (1 + S_n \cdot a^{n+1})^a = 1 + \binom{a}{1} S_n a^{n+1} + \binom{a}{2} S_n^2 a^{2n+2} + \cdots$$
$$= 1 + a^{n+2}\Big(S_n + \binom{a}{2} S_n^2 a^n + \cdots\Big) = 1 + S_{n+1} a^{n+2},$$

и како $a \nmid S_n$, закључујемо да $a \nmid S_{n+1}$. Дакле, важи $(*)$.

$(**)$ се доказује аналогно.

Из претходног закључујемо да је a^a највећи степен броја a који дели $(a+1)^{a^{a-1}}-1$ ($n = a-1$ у $(*)$) и да је a^{a+2} највећи степен броја a који дели $(a-1)^{a^{a+1}}+1$ ($n = a+1$ у $(**)$).

Тражени број је $k (= a) = 2013$.

Задатак 8. *Нaћи све природне бројеве x и n такве да је*

$$x^{2n} - 4 = 3 \cdot (4 + 4^2 + \cdots + 4^{2013}).$$

Решење. Како је

$$3 \cdot (4 + 4^2 + \cdots + 4^{2013})$$
$$= (-1+4)(4 + 4^2 + \cdots + 4^{2013})$$
$$= -4 + 4^2 - 4^2 + 4^3 - 4^3 + 4^4 - \cdots - 4^{2013} + 4^{2014} = 4^{2014} - 4,$$

дата једначина је еквивалентна са $x^{2n} - 4 = 4^{2014} - 4$, односно $x^{2n} = 4^{2014}$.

Одавде је $x^{2n} - (2^2)^{2014} = 0$, односно $(x^n)^2 - (2^{2014})^2 = 0$, па добијамо да је $(x^n - 2^{2014})(x^n + 2^{2014}) = 0$, одакле је $x^n = 2^{2014} = 2^{2 \cdot 19 \cdot 53}$. Имамо следеће могућности:

$x = 2,\ \ n = 2014,$
$x = 2^2,\ \ n = 19 \cdot 53 = 1007,$
$x = 2^{19},\ \ n = 2 \cdot 53 = 106,$
$x = 2^{53},\ \ n = 2 \cdot 19 = 38,$
$x = 2^{38},\ \ n = 53,$
$x = 2^{106},\ \ n = 19,$
$x = 2^{1007},\ \ n = 2,$
$x = 2^{2014},\ \ n = 1.$

Задатак 9. *Колико има парова целих бројева (x, y) за које важи*

$$(x + y + 2014)^2 = x^2 + y^2 + 2014^2 \ \ ?$$

Решење. Квадрирањем тринома добијамо редом да је

$$x^2 + y^2 + 2014^2 + 2xy + 2x \cdot 2014 + 2y \cdot 2014 = x^2 + y^2 + 2014^2,$$
$$xy + 2014x + 2014y = 0,$$
$$(x + 2014)(y + 2014) = 2014^2.$$

Како је $2014^2 = 2^2 \cdot 19^2 \cdot 53^2$, закључујемо да број 2014^2 има $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ различитих природних делилаца, односно има $2 \cdot 27 = 54$ различитих целих делилаца, па ћемо имати 54 различита решења. На пример, за $x + 2014 = \pm 1,\ \ y + 2014 = \pm 2014^2$, добијамо решења $(x, y) = (-2013, 4054182)$ и $(x, y) = (-2015, -4058210)$.

На сличан начин налазимо и остала целобројна решења дате једначине. Скуп таквих решења је

$$\begin{aligned}
&\{(-2013, 4054182),\ (-2015, -4058210),\ (-2012, 2026084),\ (-2016, -2030112),\\
&(-2010, 1012035),\ (-2018, -1016063),\ (-1995, 213484),\ (-2033, -215498),\\
&(-1976, 104728),\ (-2052, -108756),\ (-1961, 74518),\ (-2067, -78546),\\
&(-1938, 51357),\ (-2090, -55385),\ (-1908, 36252),\ (-2120, -40280),\\
&(-1802, 17119),\ (-2226, -21147),\ (-1653, 9222),\ (-2375, -13250),\\
&(-1292, 3604),\ (-2736, -7632),\ (-1007, 2014),\ (-3021, -6042),\\
&(-570, 795),\ (-3458, -4823),\ (0, 0),\ (-4028, -4028),\\
&(795, -570),\ (-4823, -3458),\ (2014, -1007),\ (-6042, -3021),\\
&(3604, -1292),\ (-7632, -2736),\ (9222, -1653),\ (-13250, -2375),\\
&(17119, -1802),\ (-21147, -2226),\ (36252, -1908),\ (-40280, -2120),\\
&(51357, -1938),\ (-55385, -2090),\ (74518, -1961),\ (-78546, -2067),\\
&(104728, -1976),\ (-108756, -2052),\ (213484, -1995),\ (-215498, -2033),\\
&(1012035, -2010),\ (-1016063, -2018),\ (2026084, -2012),\ (-2030112, -2016),\\
&(4054182, -2013),\ (-4058210, -2015)\}.
\end{aligned}$$

Задатак 10. *Колико целобројних решења има једначина*

$$x^2 \cdot y \cdot |z| = 2014^2\,?$$

Решење. Факторизацијом броја 2014, $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$, закључујемо да x може имати вредности $-1, 1, -2, 2, -19, 19, -53$ и 53.

За $x = \pm 1$, следи да је $y \cdot |z| = 2014^2 = 2^2 \cdot 19^2 \cdot 53^2$. С обзиром на то да број $2014^2 = 2^2 \cdot 19^2 \cdot 53^2$ има $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ различитих природних делилаца, закључујемо да ћемо за $x = \pm 1$ имати $2 \cdot 27 \cdot 2 = 108$ различитих решења (јер x и z могу имати позитивне и негативне вредности).

За $x = \pm 2$, следи да је $y \cdot |z| = 19^2 \cdot 53^2$. Како број $19^2 \cdot 53^2$ има $3 \cdot 3 = 9$ различитих природних делилаца, закључујемо да ћемо за $x = \pm 2$ имати $2 \cdot 9 \cdot 2 = 36$ различитих решења.

За $x = \pm 19$, следи да је $y \cdot |z| = 2^2 \cdot 53^2$. Како број $2^2 \cdot 53^2$ има $3 \cdot 3 = 9$ различитих природних делилаца, закључујемо да ћемо за $x = \pm 19$ имати $2 \cdot 9 \cdot 2 = 36$ различитих решења.

За $x = \pm 53$, следи да је $y \cdot |z| = 2^2 \cdot 19^2$. Како број $2^2 \cdot 19^2$ има $3 \cdot 3 = 9$ различитих природних делилаца, закључујемо да ћемо за $x = \pm 53$ имати $2 \cdot 9 \cdot 2 = 36$ различитих решења.

Дакле, дата једначина у скупу целих бројева има укупно $108 + 36 + 36 + 36 = 216$ различитих решења.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Балтић, Д. Ђукић, Ђ. Кртинић, И. Матић, ***Припремни задаци за математичка такмичења средњошколаца у Србији***, Материјали за младе математичаре, свеска 49, 2-го изд, ДМС, Београд 2011.

[2] И. Долинка, ***Елементарна теорија бројева: моји омиљени задаци***, Материјали за младе математичаре, свеска 47, ДМС, Београд 2007.

[3] З. Каделбург, В. Мићић, С. Огњановић, ***Анализа са алгебром 2***, 6-то изд, Круг, Београд 2012.

[4] З. Каделбург, П. Младеновић, ***Савезна такмичења из математике***, Материјали за младе математичаре, свеска 23, ДМС, Београд 1990.

[5] Математичка такмичења средњошколаца, ДМС, годишта 2006/07 – 2011/12.

[6] Математички лист за ученике основних школа, ДМС, број 2, 2013/14.

[7] В. Мићић, З. Каделбург, Д. Ђукић, ***Увод у теорију бројева***, Материјали за младе математичаре, свеска 15, 5-то изд, ДМС, Београд 2013.

[8] М. Станић, Н. Икодиновић, ***Теорија бројева – збирка задатака***, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд 2004.

[9] ***Тангента 10***, Збирка задатака објављених у рубрици „Задаци из математике“ часописа *Тангента* 1995–2005. године, Материјали за младе математичаре, свеска 45, ДМС, Београд 2006.

Природно-математички факултет Ниш, Србија

E-mail: `dsimce@gmail.com`

Основна школа „Стојан Новаковић'' Блаце, Србија

E-mail: `banelapcevic@gmail.com`