НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
LIX, 3 (2014), 3–8

Др Миодраг Матељевић

ФРАГМЕНТИ СЕЋАЊА НА ВОЈИНА ДАЈОВИЋА

Надам се да ми читаоци неће замерити што ћу писати неформално и према сећањима. За систематске чланке видети [1, 8]. Навешћу прво само неколико детаља у вези са улогом професора Војина Дајовића у развоју и популаризацији математике.

1. Отварање нових смерова и развој примењене математике

Упркос чињеници да су радови Михаила Петровића, оснивача београдске математичке школе, били претеча кибернетике, на ПМФ-у у Београду постојали су отпори развоју рачунарства и примењене математике. Професор Војин Дајовић је успео да савлада ове препреке. Иницирао је прво развијање Нумеричке математике (формирање Нумеричког института) у оквиру своје катедре и допринео да Математички институт 1965. године набави рачунар који је смештен у просторијама ПМФ-а и тако су студенти математике први пут почели да користе рачунар у настави.

На основу његове студије „Улога и значај математике и наставе математике у Југославији“ донета је 1962. године Препорука Одбора СИВ-а за унапређење математичког образовања. Пре доношења те препоруке на студије математике се није уписивало више од 20 студената. Сада, на пријемни испит 2014/2015, на Математичком факултету пријавило се 1019 кандидата, више од половине на рачунарство и информатику.

Традиција рачунарства представља крупну вредност београдске математичке школе и оживљава дух Михаила Петровића, а број кандидата на пријемном испиту 2014/2015 показује да је професор Дајовић имао исправну визију.

2. Образовање и популаризација математике

Војин Дајовић је перманентно учествовао у реформи наставе математике и физике на свим нивоима. Имао је тежак пут, али и огромну вољу и енергију.

Стално је водио рачуна о развоју наставе математике. У својим предавањима увек је наводио и примене математике и њене везе са другим областима. Сматрао је да су доприноси питањима наставе математике подједнако важни као и развој науке. На Природно-математичком факултету се, између осталог, залагао за увођење предмета Методика наставе математике.

Боравио је у Москви од марта 1963. до фебруара 1964. године. Проучавао је организацију научног рада и стварање научног подмлатка. На основу његовог елабората, Одбор за просвету Савезне скупштине донео је одлуку о увођењу последипломских студија.

Професори Војин и Милица Дајовић превели су уџбенике Курс диференцијалног и интегралног рачуна I, II Ричарда Куранта. На спомен-табли Курантовог института у Њујорку, на списку Курантових сарадника је и име Војина Дајовића.

Утицао је да професор Ђуро Курепа (1907–1993), који је имао већ велики углед у светским математичким и научним круговима и дубок научни траг, пређе из Загреба у Београд (школске 1965/66 године) на место редовног професора Природно-математичког факултета.

Професор Дајовић је идејни творац Математичке гимназије, о чему ће више речи бити у посебном чланку.

3. Организовање научних скупова

Један је од главних оснивача Друштва математичара и физичара НР Србије; учествовао је у оснивању Савеза друштава математичара и физичара Југославије. Савез је, између осталог, организовао научне скупове (на основу инцијативе генералног секретара Дајовића) на којима су учествовали и неки од најзначајних математичара: Шоке, Собољев, Александров, Колмогоров, Сјерпински, Неванлина и други.

Савез друштава математичара и физичара Југославије, у сарадњи са ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) организовао је симпозијум „Координација наставе математике и физике“, који је одржан у Београду од 19–24. септембра 1960. године. Организациони одбор чинили су: Ђ. Курепа (председник), М. Х. Стоун и В. Дајовић. Зборник радова је објавио Савез друштава математичара и физичара Југославије.

Организовао је, са сарадницима, три интернационална симпозијума „Комплексна анализа и примене“ – Аранђеловац ’84, Будва ’86 и Херцег Нови ’88. На њима су учествовали, између осталих, неки од најпознатијих светских математичара из те области, као што су Рудин, Хенкин, Коревар, Чирка, Ајзенберг, Ахерн, Вуоринен, Хенгартнер, Саито ... Излагане су најактуелније теме, па смо тако на Симпозијуму у Аранђеловцу добили потпуно „свежу“ информацију о Бибербаховој хипотези. Настављајући Дајовићеву визију, ми данас држимо на Математичком факултету симпозијуме Математика и примене, сваке године, почев од 2008-е.

Градио је везе међу струкама и подржавао обједињавање не само математике, физике и астрономије, него и шире – друштвених наука и филозофије са природним наукама.

4. Научни рад

Професор Дајовић је 1956. године одбранио докторску дисертацију „Егзистенција граничних вредности неких класа аналитичких функција“. Његови научни радови разматрају проблеме везане за егзистенцију граничних вредности неких класа аналитичких функција класе H^p.

У комплексној анализи, Хардијеви простори (или Хардијеве класе) H^p су простори аналитичких функција на јединичном диску или горњој полуравни. Увео их је Ф. Рис 1923. године, а добили су име по Г. Х. Хардију, на основу његовог чланка из 1915. године.

Ако је f холоморфна функција на јединичном диску, њена интегрална средина $M_p(r,f)$ по кружници полупречника r, неопадајућа је функција по $r \in [0,1)$; f припада H^p ако је $M_p(r,f)$ ограничена функција на $0 < r < 1$, тј. $\|f\|_p = \sup_{0<r<1} M_p(r,f) < \infty$.

У реалној анализи Хардијеви простори, real-H^p, јесу одређени простори дистрибуција на реалној правој $\mathbf{R}$, које су (у смислу дистрибуција) граничне вредности холоморфних функција комплексних Хардијевих простора. Прецизније, дистрибуција g на $\mathbf{R}$ припада real-H^p ако постоји $f \in H^p(\mathbb{H})$, тако да f_y тежи g, у смислу дистрибуција, када $y \to 0_+$. Овде $\mathbb{H}$ означава горњу полураван, f_y је функција дефинисана на $\mathbf{R}$ помоћу $f_y(x) = f(z)$, где је $z = x + iy$, $x \in \mathbf{R}$ и $y > 0$.

Хардијеви простори су повезани са L^p просторима који се проучавају у реалној и функционалној анализи. За $1 \le p \le \infty$, реални Хардијеви простори су одређени потпростори L^p, док за $p < 1$, L^p простори имају неке „непожељне“ особине, а Хардијеви простори су много погоднији за проучавање. Са h^p означавамо одговарајуће просторе хармонијских функција на јединичном диску.

У циљу формулације теореме 1 (део (А) је резултат Дајовића [3]), прво дајемо потребне дефиниције.

Ако је функција h дефинисана на сегменту $I = (r_0 e^{it}, e^{it})$, $0 \le r_0 < 1$, пишемо $f^*(t) = \lim_{r\to 1-0} h(re^{it})$ ако лимес постоји. Фуријеове коефицијенте функције g означавамо са $\hat{g}(n)$ или $\hat{g}_n$ и слично ако је функција f холоморфна у околини 0, пишемо $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n$.

За $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ и $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ дефинишемо Адамаров производ: $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k z^k$. Дакле, $\hat{F}_n = \hat{f}_n \hat{g}_n$.

Теорема 1. (А). Претпоставимо (i.1): $f \in H^p$ и $\operatorname{Re} g \in h^q$, где је $p, q > 1$ и $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Тада важи (I.1): F је ограничена аналитичка функција у јединичном диску.

(Б). Претпоставимо (i.2): $f \in H^p$ и $\operatorname{Re} g \in h^1$. Тада важи (I.2): $F \in H^p$, $1 \le p \le \infty$.

Даћемо неколико напомена. Коментари (а) и (б) су преузети из [5], а за (в) видети [9].

На основу Дајовићевог рада [3], Вајтман [10] је доказао инверзни исказ теореме 1. Совјетски математичари В. И. Горбаичук и В. И. Кузминч [5] уопштили су Вајтманов резултат.

Ставимо $f_\theta(r,t) = f(r, e^{i(\theta - t)})$.

(а) Киу Хуа-Ји је користио $F(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,t) f(r, e^{i(\theta-t)})\,dt + c_0$, где је $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho = r^2$, $0 < \rho < 1$, $g(r, e^{it}) = u(r,t) + iv(r,t)$, $F^*(\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u^*(t) f^*_\theta(t) dt + c_0$ и c_0 је константа.

Како је $\|f^*_\theta\|_p = \|f^*\|_p$, $f^*_\theta \in L^p$ и $u^* \in L^q$, $F^* \in L^\infty$, следи да (I.1) важи.

(б) Тумаркин је приметио да овај поступак не даје доказ дела (Б).

(в) Ако $f \in H^p$, $p \leq 1$, тада је $|\hat{f}(n)| = o(n^{\frac{1}{p}-1})$.

Дајовић је разматрао и претпоставку

(ii.1): за $f \in H^p$, постоји $\delta > 0$ тако да $|\hat{f}_n| \geq \delta$.

Ако је $0 < p < 1$ услов (ii.1) дефинише подкласу класе H^p.

С обзиром да за $p \geq 1$, $|\hat{f}_n| \to 0$, у овом случају можемо покушати да услов (ii.1) коригујемо у нпр.

(ii.2): за $f \in H^p$, $p > 1$, постоје $\epsilon, \delta > 0$ тако да $n^{\epsilon + 1/q}|\hat{f}_n| \geq \delta$.

5. Уџбеник Комплексне анализе

Професор Дајовић је објавио уџбеник [2] из кога наводимо један интересантан детаљ – доказ Приципа максимума модула (ПММ) помоћу теореме о средњој вредности.

(ПММ). Нека је функција f холоморфна на кругу $B(z_0, r_0)$ и нека важи (i): $|f|$ достиже максимум у z_0. Тада је f константа.

На основу Кошијеве формуле, за $0 < r < r_0$,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,dt$$

и стога

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|\,dt < |f(z_0)|,$$

па добијамо контрадикцију.

Напомена. У доказу је прећутно коришћено да важи (ii): постоји $r > 0$ тако да је $|f(z)| < |f(z_0)|$ за неко $z \in K(z_0, r)$, где $K(z_0, r)$ означава кружницу полупречника r.

Претпоставка да $|f|$ достиже локални максимум у z_0 значи да постоји $r_1 > 0$ тако да $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ за $z \in B(z_0, r_1)$. Отуда следи (iii): $|f| = c$ на $B(z_0, r_1)$.

Дакле, ако при претпоставци (i) не важи (ii) онда важи (iii). Постоје разни начини да се докаже да из (iii) следи да је f константа; видети нпр. [6].

Као што и овај пример показује, професор Дајовић имао је велико педагошко искуство и давао је кратке и прозрачне доказе и избегавао претерану математичку строгост.

6. Посебно је ценио совјетске математичаре. Волео је често да помене Колмогорова, Шабата, Привалова ...

Дао ми је да проучавам књигу [9] И. И. Привалова. Тако сам се заинтересовао за Хардијеве просторе. Подржао је идеју професора Миличића да се из Чачанске гимназије доведе М. Павловић. Утицао сам на Павловића да се заинтересује за ову област и тако смо добили „српског Хардија“; неки су говорили да се „у Београду појавио Литлвуд“ (алузија на Хардијевог коаутора у многим радовима).

Схватио сам да треба као Библију да студирам и Шабатове књиге [11]. Једном приликом професор Дајовић ме је позвао у свој стан; на његовој огромној полици за књиге сам нашао и књигу Г. М. Голузина [4]. Био сам одушевљен геометријском теоријом функција (ГТФ) и Гречовим аргументом. Замолио сам професора Дајовића да ми позајми Голузинову књигу; питао ме је шта ће ми та књига (вероватно је мислио да је довољно када ми је дао да проучавам књигу [9] И. И. Привалова, а и књига Голузина има „тешких“ делова).

В. Мићић, ученик професора Зорича и Дајовића, дао ми је књигу са конференције у Кентерберију у којој сам нашао и Герингов проблем. Тако је почело моје интересовање за квазиконформна (qc) пресликавања. Касније се на семинару појавио мој ученик В. Марковић, који је 2014. изабран за члана британског (енглеског) краљевског друштва (Royal Fellow of the British Royal Society) и професор у Кембриџу. Ипак, клица свега тога потиче од професора Дајовића.

Кроз следећи пример желим да илуструјем однос професора Дајовића према руским математичарима. Студент је на испиту из Комплексне анализе добио питање „Прицип максимума модула (ПММ)“ (видети тачку 4). Професор Никић је на предавањима (као и многи савремени уџбеници) користио теорему о отвореном пресликавању. Студент је на концепту исписао доказ помоћу теореме о отвореном пресликавању. Професор Дајовић није задовољан и враћа студента да поправи доказ. Студент каже да је радио по предавањима професора Никића. С обзиром да је Никић био Дајовићев ученик и да је тек постао доцент, асистент схвата да је студент неспретно одговорио. Асистент се сналази и дискретно каже професору да је доказ из Шабатове књиге [11] и ситуација се мења. Професор Дајовић је на висини задатка и каже студенту: „Зашто сте тако несигурни? Хтео сам само да вас проверим; требало је да се супроставите и зато минимална оцена шест“.

7. Често је у разговору користио пословице и као да га видим како говори када неко постави нереалне циљеве: „много је мачку говеђа глава“; или, када превише жури: „не треба се изувати пре воде“, или „није шећер пао у воду“. У шали је говорио: „математичари или умиру као апсолвенти, или дуго живе“.

Држао се Змајевог начела „Ако дајеш мало, и не можеш више, много ти се пише“. Волео је да користи и пословице „по поруци вуци месо не једу“, „што је брзо, то је и кусо“, „сваки је мајстор најбољи у свом селу“, ... Иако је заслужан за стварање младе научне елите, Војин је био анти-елитиста (нпр. подржао је и бирао асистенте и из радничких и сеоских средина).

Знао је да буде духовит. Када је Лазар Милин дошао код њега у вези са послом, рекао је „прво седи Лазаре, а онда устани Лазаре“. Када је Лазар устао, рекао је „мислио сам на песму ‘Устани царе Лазо, од Србије главо’ “.

Како рече Паскал, „Љубав нема године. Она се увек рађа.“ Војин Дајовић је целог живота имао енергију и љубав за развој математике, која као да се пренела на наш семинар за Комплексну анализу и друге активности (ако верујемо у закон одржања енергије).

Напомена. Захваљујем се професорима В. Мићићу и З. Каделбургу и колеги М. Светлику на корисним сугестијама.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Војин Дајовић 1914–1993*, ЦАНУ, Споменица преминулим члановима Академије, св. 19, З. Дамјановић, 30–34, 1995.
2. В. Дајовић, *Теорија функција комплексне промениве са применама*, Београд 1977.
3. V. Dajovich, *Sur l'existence des valeures limites de la resultante des fonctions appartenant a la classe H_δ $(\delta > 1)$*, Vesnik Društva matematičara i fizičara **8**, 1–2, 1956.
4. G. M. Goluzin, *Geometric theory of functions of a complex variable*, Transl. Math. Monogr., **26**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1969 (translated from Russian).
5. V. I. Gorbaíchuk and V. I. Kuzminch, *On some properties of the Hadamard products of functions which are regular in the unit disc*, Ukrainian Math. J., **27**, 1, 1975.
6. М. Матељевић, *Комплексне функције 1 & 2*, Друштво математичара Србије, Београд, 2006.
7. *Михаило Петровић – човек, филозоф, математичар*, Математичка библиотека, Београд, 1968.
8. В. Мићић, М. Никић, *В. Дајовић, 1914–1993*, Мат. Весник **45**, 71–74, 1993.
9. I. I. Privalov, *Boundary Properties of Analytic Functions*, 2nd ed., GITTL, Moscow-Leningrad, 1950.
10. R. A. Whiteman, *A converse form of Daiovitch's theorem*, Duke Math. J., **31**, 2, 321–324, 1964.
11. Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*, I, II, Москва 1976.

Универзитет у Београду, Математички факултет

E–mail: miodrag@matf.bg.ac.rs