Др Мирјана Илић

БРОЈНИ СИСТЕМИ СА ОСНОВОМ МАЊОМ ОД 10 КАО ЈЕДАН ТИП НОВОГ КОРИСНОГ ЗАДАТКА У НИЖИМ РАЗРЕДИМА ОСНОВНЕ ШКОЛЕ

1. Увод

Данас је у најширој употреби декадни бројни систем, мада су се кроз историју, у разним цивилизацијама, користили и системи бројева са основом различитом од 10. У овом чланку ћемо описати један од начина на који се деца у трећем и четвртом разреду основне школе могу упознати и са бројним системима чија је основа мања од 10.

Бројни системи са основом различитом од 10 се налазе у програмима виших разреда, у оквиру предмета Информатика и Програмирање. Због тога је, на самом почетку, веома важно питање, због чега би уопште било потребно да се ова тема појави већ у трећем разреду основне школе. Мотив за то не би био само да деца овладају техником рачунања у новим системима, што ни само по себи није занемарљиво, него да боље разумеју и сам декадни систем.

Наиме, већина деце ће за, на пример, број 375 рећи да је он

$$375 = 3 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 5,$$

што је, наравно потпуно тачно, јер тај број „има“ три стотине, седам десетица и пет јединица, али ће мали број њих препознати да је и

$$375 = 3 \cdot (10 \cdot 10) + 7 \cdot 10 + 5 \cdot 1,$$

што ћемо већ у четвртом разреду означавати са

$$375 = 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0,$$

односно, да у декадном систему свака позиција у вишецифреном броју има „тежину“ која је десет пута мања од „тежине“ позиције која јој је прва слева и десет пута већу од „тежине“ позиције која јој је прва здесна у том броју. То неразумевање позиционог бројног система са основом 10 би могло да представља озбиљан проблем у вишим разредима приликом увођења децималног записа броја. Рачунање у систему са неком другом основом, деци би могло да помогне да заиста схвате овај однос.

Овај рад је финансиран од стране Министарства за науку и технологију Републике Србије, у оквиру пројекта ON 174026.

2. Декадни и октални систем

Ми дакле, радимо у *декадном* бројном систему. Тај систем у основи има број 10, што се поклапа са бројем прстију које имамо на рукама. Деци, међутим, не би било тешко да замисле бића са планете Окта, која би, уместо 10, имала 8 прстију и чији би систем бројева такође био са том основом. Питање је, како бисмо се споразумели са добродушним дошљацима са Окте, који не познају цифре 8 и 9? За становнике Окте, Октане, ми имамо „12“ прстију, јер у њиховом, окталном систему, цифра 1 у броју 12, уместо броја десетица, означава број осмица (њихов број прстију!). Дакле, на Окти је

$$12 = \mathbf{1} \cdot 8^1 + \mathbf{2} \cdot 8^0$$

и тај број одговара нашем броју $1 \cdot 8 + 2 = 10$. Број 534 на Окти је број који „има“ пет $(8 \cdot 8)$-ца, три 8-це и четири 1-це, односно, пет 8^2-ца, три 8^1-це и четири 8^0-це. Он, у нашем, декадном систему, одговара броју 348:

$$5 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 = 348.$$

Најмањи четвороцифрен број на Окти је, као и код нас, број 1000. Међутим, октански број 1000 код нас „вреди“ 512:

$$1 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 0 \cdot 8^0 = 512.$$

Његов претходник на Окти је 777, којем у нашем систему одговара број 511:

$$7 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 = 511,$$

који је претходник броја 512.

У окталном систему бројева, у скупу природних бројева су следећи бројеви:

$$1, 2, \ldots, 6, 7, 10, 11, \ldots, 16, 17, 20, 21, \ldots, 76, 77, 100, \ldots,$$

дакле, то су сви „наши“ бројеви, који се могу записати без употребе цифара 8 и 9. Уместо груписања бројева по *десетицама*, које имамо у декадном систему, у систему са основом 8, бројеви су груписани по *осмицама*, па су тако бројеви:

прве осмице:	1,2, ... ,7,10
друге осмице:	11, ... ,17,20
⋮	
седме осмице:	61, ... ,67,70
осме осмице:	71, ... ,77,100
⋮	

У декадном систему, број 10 је десети број прве десетице, док је у окталном систему, то *осми* број прве *осмице*. У декадном систему број 10 се зове *десет*, а у окталном систему би могао да се зове и друкчије. Сама деца би могла дају предлоге за име броја 10 у новом систему. Нека се 10 у новом систему зове просто *осам*.

Даље, број 100 се у декадном систему зове *сто* и означава да је реч о десетом броју десете десетице. За Октане, тај исти број означава осми број осме осмице, па би могао да се зове, на пример, *осто*. Ваљало би рећи и да њему, у декадном систему одговара број $1 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 0 \cdot 8^0 = 8^2 = 64$. И броју 1000 би требало дати име, рецимо *осиду*, а њему у декадном систему одговара број $8^3 = 512$. Ученицима трећег разреда, то ће бити довољно, а са ученицима четвртог разреда би се требало договорити и око имена за бројеве 10000, 100000 и 1000000 у окталном систему. Дакле, имали бисмо:

	ДЕКАДНИ	ОКТАЛНИ
10	десет	осам
100	сто	осто
1000	хиљаду	осиду

Следећи задатак би био да помогнемо Октанима да схвате наш декадни систем, односно да им објаснимо колико у њиховом, окталном, систему „вреде“ наши бројеви. То захтева јасно разумевање самог декадног система. Наиме, шта код нас значи, на пример, број 17? Просто, да се у тај број може „сместити“ највише 1 десетица и 7 јединица. Дакле, да бисмо превели „наш“ број 17 у октални систем, требало би да откријемо колико се највише … осида, остотина, осмица и јединица, може „сместити“ у тај број. Како остотина „вреди“ 64, а осида 512, јасно је да се ниједан од њих не може „сместити“ у 17; остале су осмице и јединице. Дакле, требало би попунити празна поља у:

$$17 = \underline{\quad\quad} \cdot 8 + \underline{\quad\quad}\ ,$$

након чега добијамо

$$17 = \mathbf{2} \cdot 8^1 + \mathbf{1} \cdot 8^0,$$

дакле, да нашем броју 17 у окталном бројном систему одговара број 21.

До сада би деци требало да буде потпуно јасно да један број у различитим системима, различито „вреди“ па је право време да се уведу и за то одговарајуће ознаке:

$$17_{10} = 21_8.$$

Требало би још једном јасно истаћи да се у декадном и окталном бројном систему, скупови цифара разликују. Декадни систем има 10 цифара и то су: $0, 1, \ldots, 9$, док октални систем има само следећих 8 цифара: $0, 1, \ldots, 7$.

3. Систем бројева са основом $y > 1$

Уопште, позициони бројни систем са основом $y > 1$, има тачно y цифара, и то су $0, 1, \ldots, y-1$. Уколико је $y > 10$, а такве системе не би требало помињати у трећем и четвртом разреду основне школе, за цифре које су веће од 9, користе се велика латинична слова. Тако систем бројева са основом 16 има следећих 16 цифара: $0, 1, 2, \ldots, 9, A, B, C, D, E, F$, при чему смо уместо $10, 11, \ldots, 15$ узели редом слова $A, B, \ldots, F$.

Цео овај концепт се ослања на следеће тврђење, које ћемо у наставку и доказати:

Лема. *Сваки природан број x се, за сваки природан број $y > 1$, на јединствен начин може представити у облику*

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_1 y^1 + a_0 y^0,$$

где су $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ бројеви из скупа $\{0, 1, \ldots, y-1\}$. Тада за запис $(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_y$ кажемо да представља број x у систему са основом y.

Доказ. Да бисмо доказали да се сваки природан број x може представити у облику $a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_1 y^1 + a_0 y^0$, поступићемо на следећи начин. Дељењем броја x бројем y, добићемо количник q_1 и остатак a_0, па је

$$x = q_1 \cdot y + a_0.$$

Тако смо добили a_0, цифру која се налази на месту најмање тежине (тежине y^0) у запису броја x. Следећу цифру, a_1, добићемо дељењем броја q_1 бројем y, када је

$$q_1 = q_2 \cdot y + a_1.$$

Настављајући овај поступак, добићемо и остале цифре у запису броја x. Последња од њих, цифра a_n, која се налази на месту највеће тежине (тежине y^n), добија се на следећи начин:

$$q_n = q_{n+1} \cdot y + a_n,$$

где је $q_{n+1} = 0$.

Дакле, сваки природан број се може представити у датом облику. Да бисмо доказали да је овакав запис броја јединствен, претпоставићемо супротно, наиме да се x може записати на два начина:

$$x = a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_1 y^1 + a_0 y^0,$$
$$x = b_n y^n + b_{n-1} y^{n-1} + \cdots + b_1 y^1 + b_0 y^0,$$

при чему су цифре $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ и $b_n, b_{n-1}, \ldots, b_0$ бројеви из скупа $\{0, 1, \ldots, y-1\}$ и важи $a_i \neq b_i$, за бар једно i, $0 \leq i \leq n$. Одавде је

$$0 = x - x = (a_n - b_n) y^n + \cdots + (a_0 - b_0) y^0,$$

а то је могуће једино за

$$a_n - b_n = \cdots = a_0 - b_0 = 0,$$

дакле када је

$$a_n = b_n \wedge \cdots \wedge a_0 = b_0,$$

што је супротно претпоставци. Следи да се сваки природан број на јединствен начин може представити у датом облику. ∎

4. Примери

Уводни задаци би свакако требало да буду облика:

$$35_6 = \underline{\quad\quad}_{10} \qquad 39_{10} = \underline{\quad\quad}_2$$

али и

$$43_7 = \underline{\quad\quad}_3 \qquad 123_5 = \underline{\quad\quad}_9.$$

Сабирање се, у почетку, може радити преко израчунавања у декадном систему:

$$23_4 + 11_4 = 11_{10} + 5_{10} = 16_{10} = 100_4,$$

али касније и директно, са потписивањем:

$$\begin{array}{rr} & 13_7 \\ + & 52_7 \\ \hline & 65_7 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 64_7 \\ + & 26_7 \\ \hline & 123_7 \end{array}$$

Овакве задатке би требало радити све док деца не схвате „пренос“ што у последњем задатку значи следеће. Сабирањем цифара које се налазе на месту јединица, добијамо

$$4_7 + 6_7 = 13_7.$$

Цифру 3 записујемо на место јединица у збиру, а 1 преносимо на место „седмица“. Сада на месту „седмица“ имамо

$$1_7 + 6_7 + 2_7 = 12_7.$$

Дакле, $64_7 + 26_7 = 123_7$.

Неки проблемски задаци би могли да гласе:

Задатак 1. Јоца је имао 234_5 сличица. Дао је Пеци 34_5 сличице, а од Миће је добио 22_3 сличице. Колико сличица сада има Јоца?

Јасно је да рачунање треба обавити у једном систему, а најлакше ја да то буде, барем у почетку, декадни систем.

Задатак 2. Ако је $46_x + 32_x = 100_x$, колико је x?

Дакле, питање је у ком систему је извршено сабирање? Оног тренутка, када деца буду „видела“ да је у том систему $6_x + 2_x = 10_x$, схватиће да је 8 у том систему, оно што је 10 у декадном, дакле *основа*.

И тако даље. Наравно да се слични задаци могу формулисати и са одузимањем (у овој, првој фази, требало би изоставити множење и дељење).

Посебну пажњу би требало посветити бинарном систему.

Задатак 3. У једном разреду има 11100_2 деце. Ако је 1101_2 девојчица, колико у том одељењу има дечака?

Дакле, требало би израчунати

$$\begin{array}{rr} & 11100_2 \\ - & 1101_2 \\ \hline & \_\,\_\,\_\,\__2 \end{array}$$

Међутим, деца би вероватно то лакше израчунала на следећи начин:

$$\begin{array}{rr} & 1101_2 \\ + & \_\,\_\,\_\,\__2 \\ \hline & 11100_2 \end{array}$$

Јасно је да је тражени број 1111_2. Језиком декадног система, у разреду је 28 деце, 13 дечака и 15 девојчица.

Свакако да би, за крај, деци требало скренути пажњу на вредност сваке позиције у броју бинарног система, дакле на

$$\ldots \quad 2^5 \quad 2^4 \quad 2^3 \quad 2^2 \quad 2^1 \quad 2^0$$

што је и основа за кодирања, која ће се у вишим разредима обрађивати у предмету Информатика.

Осим тога, ово је основа и за разумевање неких другчијих проблемских задатака. На пример,

Задатак 4. а) Како се уз помоћ тегова од 1 g, 2 g, 4 g, 8 g и 16 g на теразијама могу одмерити све масе од 1 g до 31 g?

б) Коју је највећу масу могуће измерити помоћу тегова од 1 g, 2 g, 4 g, 8 g, 16 g и 32 g? Како помоћу тих тегова одмерити масе од 19 g, 49 g и 57 g?

Закључак је да се уз помоћ бројева 1, 2 и 4 и сабирања, могу изразити сви природни бројеви од 1 до 7, да се уз помоћ бројава 1, 2, 4, 8 и 16 и сабирања, могу изразити сви природни бројеви од 1 до 31, и тако даље.

У вези са тим је и следећи задатак.

Задатак 5. Један путник није имао новца, али је имао златни ланац од а) седам, б) двадесет карика. Власник крчме коме се путник обратио са молбом за преноћиште, пристао је да га прими, под условом да свако преноћиште плати једном кариком ланчића.

а) Коју, само једну, карику је довољно пресећи, да би путник могао да плати за било који број ноћења, од 1 до 7?

б) Колико најмање, и које карике би требало пресећи да би путник могао да плати за било који број ноћења, од 1 до 20?

Пресецањем треће карике, путник ће, у задатку под а), добити три ланца од 1, 2 и 4 карике, којима ће моћи да плати било који број ноћења од 1 до 7.

Пресецањем исте карике, у задатку под б), он ће моћи да плати једно, два и три, али неће моћи да плати и тачно четири ноћења. Потребан му је ланац од 4 карике, који ће добити пресецањем и осме карике. Тако ће моћи да плати било који број ноћења од 1 до 8, али неће моћи да плати и тачно 9 ноћења. Ланац од 8 карика, који би му је за то био потребан, добиће пресецањем и 17. карике.

5. Закључак

На самом крају, требало би јасно рећи да наша намера није била да се у школске програме, равноправно са декадним, уврсте и бројни системи са основом различитом од 10. Овакви покушаји су чињени раније, најпре у школским системима Сједињених Америчких Држава (у оквиру New Math пројекта, 60-тих година прошлог века), а касније и у земљама Западне Европе (Великој Британији, Француској и Западној Немачкој). New Math је у школе ушао у оквиру корените промене у програмима, која је настала након што су руски инжењери и математичари показали надмоћ у космичком програму. Циљ је био да се унапреди образовање популације, и одговори руској интелектуалној претњи за потпуну превласт. Међутим, време је показало да су преамбициозни програми и апстрактни приступ, довели до тога да деца нису схватала основне појмове, због чега се од овог програма убрзо и одустало.

Наш циљ овде је био да представимо један начин на који се деци, кроз игру, може објаснити позициони бројни систем, где „тежина“ сваке позиције представља степен његове основе, за коју смо се договорили да у „нашем свету“ буде 10. Истовремено, код деце је „освешћена“ идеја да је то могао бити и било који други број, чак и то да су системи са другим основама подједнако „живи“ као и наш, а да мостове за прелазак из једног у други није тешко прећи. Дакле, не залажемо се за равноправан третман Земљана и Октана, већ за кључ њиховог међусобног разумевања.

ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Ifrah, *The Universal History of Numbers: From Prehistory to the Invention of the Computer*, Wiley, 1999.

[2] П. Кртолица, *Стари Вавилонци и њихова математика*, Математика и информатика, **1**, 1–2 (2008), 9–14.

[3] П. Кртолица, *Стари Египћани и њихова математика*, Математика и информатика, **1**, 3 (2009), 1–7.

Економски факултет Универзитета у Београду

E-mail: mirjanailic@ekof.bg.ac.rs