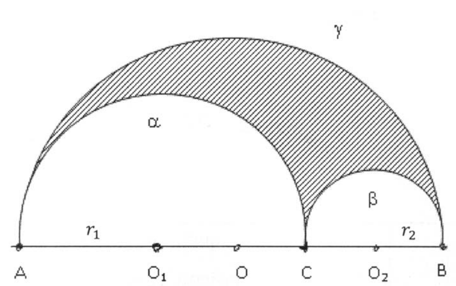
Кармелита Пјанић, Санела Несимовић

ГЕОМЕТРИЈСКА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА НЕЈЕДНАКОСТИ ИЗМЕЂУ БРОЈЕВНИХ СРЕДИНА ПОМОЋУ АРБЕЛОСА

Сматра се да је Архимед први математичар који је изучавао арбелос ($\alpha\rho\beta\eta\lambda o\varsigma$). Иако у његовим сачуваним делима нема помена о арбелосу, многи историчари сматрају да је управо Архимед увео појам арбелоса и изучавао његове особине у Књизи лема.

Арбелос или „обућарев нож" је лик ограничен са три међусобно тангентне полукружнице с колинеарним центрима (слика 1).



Слика 1

$\alpha = k(O_1, r_1)$, $\beta = k(O_2, r_2)$, $\gamma = k(O, r)$, $d_1 = 2r_1$, $d_2 = 2r_2$, $d = 2r$

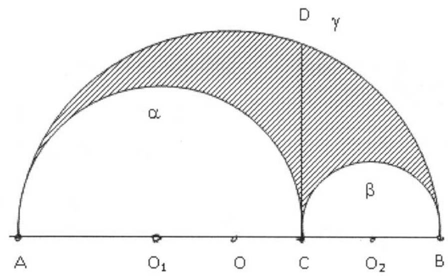
Основна, али не и очигледна својства арбелоса, дата су у следећем тврђењу.

Теорема 1. *Нека важе ознаке као на слици 1. Обим арбелоса једнак је $d\pi$, а површина $r_1 r_2 \pi$. Ако са D означимо пресечну тачку полукружнице γ и нормале на праву AB у тачки C, тада је површина круга пречника CD једнака површини арбелоса.*

Доказ. Посматрајмо слику 2.

Важи:

$$d = 2r_1 + 2r_2 = r_1 + r_2 + r,$$
$$O = \frac{1}{2}(O_\gamma + O_\beta + O_\alpha) = \frac{1}{2}(2r\pi + 2r_2\pi + 2r_1\pi) = \pi(r + r_2 + r_1) = d\pi.$$



Слика 2

Докажимо тврђење о површини P_A арбелоса. Површина круга дијаметра CD је

(1) $$P_{k(CD)} = \frac{|CD|^2\pi}{4}.$$

Површина арбелоса износи

(2)
$$\begin{aligned} P_A &= \frac{1}{2}(P_\gamma - P_\beta - P_\alpha) = \frac{1}{2}(r^2\pi - r_2^2\pi - r_1^2\pi) = \frac{\pi}{2}[(r_1+r_2)^2 - r_2^2 - r_1^2] \\ &= \frac{\pi}{2}\cdot 2r_1r_2 = r_1r_2\pi. \end{aligned}$$

Троугао ABD је правоугли с правим углом код темена D. Дуж CD је висина тог троугла. Применом Питагорине теореме на $\triangle ABD$ добијамо

$$|CD|^2 = d_1 \cdot d_2 = 4r_1r_2.$$

Одавде и из (1) и (2) следи $P_{k(CD)} = P_A$, што је и требало доказати. ∎

Уз помоћ арбелоса можемо визуелно предочити неједнакости хармонијске, геометријске, аритметичке и квадратне средине за два броја. У том циљу, докажимо следеће тврђење.

Теорема 2. *Нека важе ознаке као на слици 3. Тада важи:*

а) Дужина дужи CQ је квадратна средина дужина d_1 и d_2.

б) Дужине дужи OQ и дужи OD једнаке су аритметичкој средини дужина d_1 и d_2.

в) Дужина дужи CD је геометријска средина дужина d_1 и d_2.

г) Ако је D' подножје нормале из тачке C на дуж OD, онда је дужина дужи DD' хармонијска средина дужина d_1 и d_2.

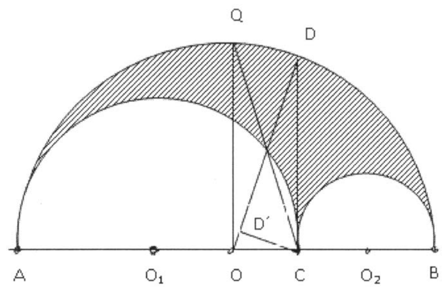
д) Ако је $d_1 \geqslant d_2$, онда је

$$d_2 \leqslant H(d_1,d_2) \leqslant G(d_1,d_2) \leqslant A(d_1,d_2) \leqslant K(d_1,d_2) \leqslant d_1.$$

Једнакости у претходним неједнакостима важе ако и само ако је $d_1 = d_2$.

Доказ. а) Троугао QOC је правоугли с правим углом код темена O, при чему је

$$|OQ| = \frac{d}{2} \quad \text{и} \quad |OC| = d_1 - |AO| = d_1 - \frac{d}{2}.$$



Слика 3

Због $d = d_1 + d_2$, применом Питагорине теореме на $\triangle QOC$, из $|CQ|^2 = |OQ|^2 + |OC|^2$ лако добијамо да је

$$|CQ|^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(d_1 - \frac{d}{2}\right)^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2}{2}.$$

Дакле,

$$|CQ| = \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2}{2}} = K(d_1, d_2).$$

б) Дужи OQ и OD су полупречници кружнице $k(O, (d_1+d_2)/2)$, па је тврђење очигледно.

в) Према Питагориној теореми, у $\triangle OCD$ је

$$|CD|^2 = |OD|^2 - |OC|^2 = \left(\frac{d_1 + d_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_1 - d_2}{2}\right)^2 = d_1 d_2.$$

Одавде је $|CD| = \sqrt{d_1 d_2} = G(d_1, d_2)$.

г) Посматрајмо сличне троуглове $DD'C$ и DCO. Имамо да је

$$\frac{|DD'|}{|CD|} = \frac{|CD|}{|OD|}, \quad \text{тј.} \quad |DD'| = \frac{|CD|^2}{|OD|}.$$

Одавде и из б) и в) добијамо да је

$$|DD'| = \frac{d_1 d_2}{\frac{d_1 + d_2}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}} = H(d_1, d_2).$$

д) Из правоуглог троугла QOC у којем је CQ хипотенуза, и из а) и б), следи да је

$$K(d_1, d_2) = |CQ| \geqslant |OQ| = A(d_1, d_2). \tag{3}$$

Аналогно, у правоуглом троуглу OCD је

$$A(d_1, d_2) = |OD| \geqslant |CD| = G(d_1, d_2), \tag{4}$$

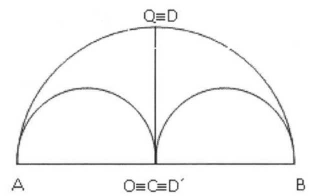
и у правоуглом троуглу $CD'D$ је

$$G(d_1, d_2) = |CD| \geqslant |DD'| = H(d_1, d_2). \tag{5}$$

Даље, уз услов да је $d_1 \geqslant d_2$, важи:

(6)
$$d_1 = |AC| = |AO| + |OC| = |OQ| + |OC| \geqslant |CQ| = K(d_1, d_2),$$
(7)
$$d_2 = |CB| = |OB| - |OC| \leqslant |OB| - |OD'| = |OD| - |OD'| = |DD'| = H(d_1, d_2).$$

Из релација (3)–(7) следи први део тврђења д).



Слика 4

Из претходних извођења јасно следи да свака од наведених једнакости важи ако и само ако је $d_1 = d_2$ (слика 4).

Тиме је доказ теореме 2 комплетиран. ■

ЛИТЕРАТУРА

[1] R. B. Nelsen, *Proof without words: The area of an arbelos*, Math. Mag. **75** (2002), 144.

[2] W. W. Rouse Ball, *A Short Account of the History of Mathematics, Dover Publications*, New York, 1991.

[3] S. Stein, *Archimedes: What Did He Do Besides Cry Eureka*, Mathematical Association of America, 1999.

Педагошки факултет, Универзитет у Бихаћу

E-mail: kpjanic@gmail.com

Педагошки факултет, Универзитет у Сарајеву

E-mail: sanelanesimovic@hotmail.com