НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
LIX, 4 (2014), 17–30

Александра Равас

ПОРЕКЛО И НАСТАНАК ТЕОРИЈЕ ВЕРОВАТНОЋЕ

Игре на срећу, проблем поена и преписка између Паскала и Фермаа

> Захваљујући овом Есеју увиђамо да теорија вероватноће није ништа друго до здрав разум сведен на рачун; она омогућује да се прецизно оцени оно што ваљане главе осећају неком врстом инстинкта, при чему често те своје способности нису ни свесне.[1]
>
> Пјер-Симон Лаплас

Теорија вероватноће је данас интегрални део средњошколског програма математике и треба да упозна ученике са основама математичке дисциплине општеприсутне у нашој свакодневици. Почев од предвиђања победника на изборима, преко временске прогнозе, купопродаје различитих врста осигурања, тестирања нових врста лекова и медицинских третмана, спортских статистика које чине основу кладионичарске индустрије, актуарства и управљања ризицима, вероватноћа, заједно са статистиком представља незаобилазни елемент савременог живота. Како је ову математичку дисциплину, између осталог, изнедрила и људска жеља да побеђује у играма на срећу, може се рећи да је она творевина великог броја појединаца који често нису били професионални математичари.

Кратка историја игара на срећу – коцкице и карте

Корени игара на срећу сежу дубоко у прошлост. Према неким изворима, порекло им се може тражити у древним религиозним церемонијама које су подразумевале читање воље богова из положаја предмета бачених на тло под одговарајућим околностима укључујући молитву или диретктно постављање питања божанствима од стране свештеника[2].

Најчешћи објекат који су древни народи користили у играма на срећу била је зглобна кост (астрагалус) из ноге копитара. Због свог специфичног облика она може при бацању на чврсту подлогу да падне на једну од четири дуже стране, од којих су две широке а две уске, и довољно се међусобно разликују да нису морале

Саопштено на 13. српском математичком конгресу, Врњачка бања, 22–25. мај 2014.

[1] Из дела Introduction to 'Théorie des Probabilités'; такође објављено и као посебно издање под насловом Essai philosophique sur les Probabilités (1814).

[2] Опис таквих церемонија се може наћи у Херодотовој „Историји" (књига IV, 67)

бити означаване. Према сачуваним записима ренесансних истраживача који су покушавали да реконструишу бодовање, странама астрагалуса су биле додељене вредности 1, 3, 4 и 6, а емпиријским путем, уз употребу астрагалуса данашње овце, дошло се до закључка да су се 1 или 6 добијали једном у десет бацања, а 3 или 4 четири пута у десет бацања.

Једна од игара коју су упражњавали древни Грци и Римљани састојала се из истовременог бацања 4 астрагалуса и евидентирања њихових горњих страна. Према најчешће употребљаваном правилу, највећу вредност је имало бацање у коме би се појавиле све четири различите стране (тзв. Венерино бацање). Најмање вредно бацање, четири јединице, се називало псећим, и значило је губитак у игри[3]. Интересантно је да је вероватноћа добијања четири јединице била релативно мала и једнака 0,0001, док је вероватноћа добијања Венериног бацања била 0,0384. Највећу шансу да се појави при бацању четири астрагалуса је имала комбинација две тројке и две четворке са вероватноћом 0,1536 [8, стр. 7].

Данас није јасно да ли је шестострана коцка настала брушењем астрагалуса, како би се добиле стране једнаких површина, али је сигурно да је такав облик реквизита за игре на срећу био присутан доста пре рођења Христа. Најстарије коцкице у савременој шестостраној форми откривене су у северном Ираку, на налазишту Тепе Гавра. Биле су од црвене глине, имале су стране означене тачкама, редом од једне до шест, при чему су са супротних страна били бројеви 2 и 3, 4 и 5, 6 и 1, а процењено је да су направљене почетком трећег миленијума пре нове ере. Коцкице нађене на локалитету Мохенџо-даро у данашњем Пакистану датиране су на период експанзије града, између 2600. и 1800. године, и такође су на супротним странама имале узастопне бројеве представљене тачкама, само су код њих парове чинили 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6. Означавање које се користи данас а код кога је збир тачака на супротним странама увек 7, може се видети на коцкицама са краја XVIII династије (Египат, 1370. п.н.е).

Како су Стари Грци познавали геометрију правилних тела у другој половини првог миленијума, не изненађује да су међу ископинама нађене и коцкице у облику икосаедра чијих је двадесет страница било означено грчким словима или римским бројевима. Данас се у њујоршком Метрополитен музеју могу видети такве коцкице израђене од керамике и серпентина а у Британском музеју чувају примерке направљене од кварца.

Питање, када су се појавиле прве игре које су као реквизит користиле коцкице, данас нема прецизан одговор. Познато је да је игра паса и шакала у којој су се фигуре кретале по плочи за игру на основу дефинисаних правила и уз коришћење астрагалуса играна у Египту још око 3500. године пре нове ере. Такође је врло вероватно да су се у то време астрагалуси користили и у религиозне сврхе. Игре са коцкицама, као и прорицање помоћу њих, појавили су се у Египту тек са доласком на власт династије Птолемеја у IV веку пре нове ере.

Међутим, спомињући глад која је око 1500. године пре нове ере захватила

[3] Могуће је да одатле води порекло енглески израз “going to the dogs”, који има значење играти као губитник

Лидију, Херодот у својој „Историји“ (књига I, 94) пише да су коцкице, и шестостране и астрагалусе измислили Лиђани и да су користили разне игре како би заварали глад – једног дана би се читав дан играли, а следећег би јели и тако редом. У истом смислу Ђироламо Кардано, италијански лекар и математичар, у својој „Књизи о играма на срећу“, у одељку који носи назив *О играма на срећу међу древним народима*, навео је како су, током десетогодишње опсаде Троје, отприлике око 1200. године пре нове ере, измишљене игре на срећу са циљем да ојачају морал грчких војника који су учествовали у опсади, јер су патили од досаде.

Као што је тешко тачно утврдити када и где су измишљене прве игре на срећу, подједнако је тешко прецизирати када су шестостране коцке истиснуле астрагалусе из употребе, али како је познато да су карте за игру измишљене тек око 1300. године нове ере, сигурно је да су се пуних хиљаду година игре на срећу играле само употребом коцкица.

Древни Израелити нису познавали игре на срећу, а коцкице су прихватили тек у време Ирода I Великог (73. п.н.е–4. п.н.е), међутим, коцкање је било забрањено код Јевреја под претњом смртне казне. Наиме, рабини су сматрали неморалним то што коцкар увек очекује да ће победити и на тај начин добити нешто, а да није дао ништа, и да се не разликује од пљачке.

До времена експанзије Римљана, игре на срећу су постале уобичајена забава, не само образованих слојева друштва, већ и нижихкласа. Коцкање је било толико популарно међу Грцима и Римљанима да су донети закони којима се оно забрањивало, осим у неким одређеним годишњим добима. Тако је познато да је Римљанима било дозвољено да се коцкају само за време трајања Сатурналија. Према Светонију, император Август (63. п.н.е–14. н.е) није поштовао то ограничење и коцкао се из забаве, чак и у позним годинама, и то не само у месецу децембру (време Сатурналија), већ и на остале празнике, али и у радне дане. Император Клаудије (10. п.н.е–54. н.е) је чак написао књигу о коцкарској вештини, која није сачувана, а осим тога је имао обичај да се коцка при вожњи, бацајући коцкице на табли која је на посебан начин била причвршћена за његову кочију. Још један страствени играч био је император Марко Аурелије (121–180), кога је свуда пратио лични крупије.

Током Средњег века црква и држава су водиле борбу против игара на срећу. Са једне стране, црква их је посматрала као део паганске религије коју је требало искоренити, мада је, према неким изворима, основни разлог за забрану заправо лежао у пороцима који су пратили игре на срећу – конзумирању алкохола и псовању. Интерес државе је био сузбијање лењости, беспосличарења, расипништва и криминала, што су такође били неизбежни елементи окружења у коме су се оне играле. Тако је учесницима 3. крсташког рата (1189–1192) било прописано да, уколико су по рангу имали чин нижи од витеза, нису смели да се коцкају за новац, док су витезови и свештенство имали дозволу да играју, уз услов да не изгубе више од 20 шилинга у року од 24 сата. Француски краљ Луј IX (1214–1270) донео је едикт којим се забрањује не само бацање коцкица и играње шаха (!), већ и производња коцкарских реквизита и држање коцкарница у његовом краљевству.

Средњевековна историја је пуна сличних покушаја да се забрани коцкање, без резултата.

Константни напори грађанских и црквених власти да контролишу игре на срећу указују на њихову постојаност и свеприсутност. Низ закона је донет за време владавине енглеског краља Едварда III (1312–1377) којима су коцкице и карте биле додате на списак недозвољених врста забаве, са жељом да се промовишу мужевни спортови попут стрељаштва. Крајем четрнаестог века, 1397. године у Паризу је издат едикт који је забрањивао играње извесних игара радним данима, између осталог и картање.

Кроз хиљаде година које су прошле од појаве првих реквизита за игру на срећу, ретки су докази да су људи покушавали да одреде фреквенцију појављивања неког исхода при бацању коцкица, а сигурно је да нису приметили да је, како бисмо данас рекли, подједнако вероватно да ће при бацању коцкица показати било коју своју страну. Један од раних резултата[4] насталих у покушају да се уоче нумеричке правилности у играма на срећу је тачна листа 56 различитих могућих исхода који се појављују при бацању три коцкице. Њу је сачинио бискуп Виболд из Камбреа (фр. Wibold de Cambrai), и данас се сматра да је мотив могао бити Виболдова жеља да омогући свештенству да се игра коцкицама а да не изгуби побожност. Наиме, он је сваком од могућих исхода приписао једну врлину а играчи су, бацајући коцкице, стицали те врлине.

Не постоји јединствен став по питању разлога зашто жеља да се победи у играма на срећу није током тих хиљада година, раније довела до некаквог уопштавања и уочавања образаца понављања. Према једнима, први реквизити који су коришћени можда нису били довољно правилни да би се обезбедило да при бацању буде једнако вероватно да се добије било која страна. Други сматрају да математичка нотација није била довољно развијена да би се правилности могле трансформисати у законитости. А можда је прави разлог у чињеници да је идеја случајности била непознаница за људско друштво, јер су и према античким веровањима и према хришћанском учењу богови директно утицали на сва жива бића и управљали догађајима.

Проблем поена

Крајем XV века се ипак створило погодно окружење за развој рачуна шанси. Најпре, број различитих врста игара на срећу је у то време значајно порастао захваљујући развоју трговине. Бити трговац је значило имати могућност друштвеног напретка захваљујући стеченом богатству, али је, са друге стране, носило велике ризике. Како би се они умањили уведено је осигурање и паралелно су се почеле појављивати прве банке, а то је даље утицало на Цркву да ублажи своје стриктно противљење давању новца под камату, и касније, од XVI века довело до појаве лутрија. Како су најбогатији трговци живели на простору данашње Италије, није неочекивано да је управо тај простор изнедрио нове поступке рачунања

[4] Постоје извори који говоре у прилог томе да су најранији резултати комбинаторне анализе направљени у древној Индији око 850. године [19, стр. 65]. У овом раду се ограничавамо на европски географски простор.

и двојно књиговодство. Захваљујући знањима и бројевном систему донетом са Истока, рачунање са абакусом и римским бројевима замењено је знатно једноставнијим поступком који је користио арапске цифре и нулу. Почеле су се појављивати математичке књиге, које су практично биле намењене трговцима, због чега су биле писане на италијанском уместо на латинском језику, и садржале су разна корисна знања, између осталог и поступке за решавање кубних једначина, али и неке једноставне проблеме из области игара на срећу. Ренесанса, која се окреће античким временима изучавајући и тражећи инспирацију у уметности, књижевности, филозофији, па чак и начину живота старе Грчке и Рима, доноси све већу равнодушност према ауторитету Цркве. Сви ти фактори су почетком XV века омогућили популаризацију и експанзију игара на срећу [9, стр. 137].

Не чуди да су игре на срећу полако постале предмет интересовања математичара који су током XVI и XVII века углавном анализирали задатке у вези са бацањем коцкица, играма са лоптом, играма које се играју на табли и лутријом. Задаци који се базирају на шпилу карата су узели примат у анализама са почетка XVIII века. Самим тим и коришћена терминологија је преузета из игара на срећу: број шанси, вредност бацања, очекивање ... Појам *вероватноћа* је усвојен тек почетком XVIII века, до када се углавном говорило о шансама да се оствари жељени исход.

Питање праведне поделе улога у прекинутој игри познато и као *проблем поена*, пошто се за сваку освојену рунду победнику може доделити поен, било је један од главних замајаца који су довели до стварања теорије вероватноће. Иако је разумно закључити да је настао из неке реалне ситуације, тешко да је у питању практични коцкарски проблем. Наиме, лако је замислити да су у таквим ситуацијама учесници у игри сигурно налазили некакав начин поделе, или бацањем коцкице за улог, или играњем до краја партије, а можда и употребом грубе силе. Међутим, чињеница је да је овај математички задатак вековима заокупљао пажњу. Најранија откривена формулација овог проблема се датира на крај XIV века, и налази се у рукопису *Urb. Lat 291*, збирци аритметичких и алгебарских задатака која се данас чува у Ватикану. Током XVI века у више италијанских трактата су се појавили предлози решења, неки делимично тачни а неки потпуно нетачни.

Први штампани извор у коме се може наћи проблем поена је књига „Све о аритметици, геометрији, размерама и пропорцијама"(ит. Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità) фрањевца Луке Пачолија из 1494, и он је у њој задат у следећем облику:

> Екипа учествује у игри са лоптом у којој је победник она која освоји 60 поена, а сваки гол вреди 10. Свака екипа је уложила по 10 дуката. Из неког разлога не могу да заврше игру у тренутку када једна екипа има 50 поена а друга 20. Како треба поделити почетни улог?[5]

Сама формулација проблема наводи на закључак да он има арапско порекло, а Пачоли је сматрао да подела треба да се изврши у складу са до прекида освојеним бројем поена, односно у размери 5:2. Интуитивно би требало да је јасно

[5]Према транскрипцији професора Ричарда Палскемпа из оригиналног текста

да таква подела није праведна, јер би, према њој, како је приметио Кардано, у игри у којој треба освојити 19 поена, при резултату 2:0, први играч однео цео улог, иако му до победе фали још 17 поена, тј. у предности је, у односу на другог играча, само за та два поена. Кардано кроз разматрања у свом делу „Књига о играма на срећу“ (лат. Liber deludo aleae, 1565[6]) први у историји прелази са емпиријског посматрања на теоријски концепт поштене коцкице. Осим тога, у XIV поглављу је дефинисао вероватноћу као количник једнако вероватних догађаја:

> Дакле, постоји једно опште правило које каже да треба посматрати цело коло[7] и број оних бацања који каже на колико начина се жељени исход може остварити и упоредити тај број са остатком кола, и према тој пропорцији треба поставити улоге у опклади како би се сви борили под једнаким условима.

Такође је дао примену правила збира и правило множења којим се одречују вероватноће при задатом броју понављања неког догађаја. Захваљујући свему наведеном, Кардано би се потпуно оправдано могао сматрати оцем модерне теорије вероватноће.

У трактату из 1539. под називом „Пракса аритметике“ (лат. Practica Arithmeticae) Кардано решава проблем поена као проблем пропорција, не примећујући везу са вероватноћом. У ситуацији када је једном играчу потребно да освоји још један поен да би победио у игри, а другом још три, сматра да је праведна подела 6 : 1. Кардано образлаже решење посматрајући најпре ситуацију у којој обојици фали по један поен, затим када једном играчу фали један, а другом два, и на крају закључке уопштава на полазни случај. Његова подела је у прва два случаја коректна, али је погрешио на крају, дуплирајући међурезултат. Такође, кроз више примера, он указује на Пачолијеве грешке и даје своје, подједнако нетачно решење, према коме се улог дели у размери 10 : 1. Међутим, за разлику од Пачолија, Кардано исправно примећује да подела улога треба да зависи од тога колико поена сваки од играча треба још да освоји, а не од тога колико је већ освојио.

Чувени Карданов супарник и непријатељ Николо Тартаља разматрао је праведну поделу у свом „Општем трактату о бројевима и величинама“ (ит. Generale Trattato di Numeri et Misure) из 1556. У одељку који носи назив „Грешка фра Луке од Борга“, он наводи Пачолијев задатак, у коме је улог измењен са 10 на 11 дуката по играчу и објашњава како би према Пачолијевом методу, у случају да је резултат био 1 : 0, односно да је први играч пре прекида постигао само један гол, он однео цео улог, што нема никаквог смисла. Тартаља је предложио поделу у којој одступање од половине улога треба да буде једнако разлици у до тада освојеним поенима. Решење није добро зато што улог треба поделити у складу са вероватноћом освајања укупне суме уложеног новца. На крају своје анализе, Тартаља додаје да сматра да питање није математичке природе и да ће, како год се спроведе подела, увек постојати спор заинтересованих страна.

Само две године касније, 1558, Ђовани Франческо Певероне (Giovanni Francesco Peverone) је објавио „Два кратка и једноставна трактата, први о аритмети-

[6] Према Кардановој аутобиографији; прву верзију је завршио 1525, а затим је написао изнова 1565.

[7] Кардано целим колом назива број свих могућих исхода неког догађаја.

ци, други о геометрији“ (ит. Due Brevi e Facili Trattati, il Primo d'Arithmetica, l'Altro di Geometria). Утрећој књизи трактата посвећеног аритметици могу се наћи три варијанте проблема поена. Певероне није навео порекло та три задатка које решава одређујући непознати, четврти члан просте пропорције, али је установљено да их је преузео из Карданове „Праксе опште аритметике“. Попут оригиналне Карданове, и Певеронеова подела је у прва два случаја коректна, али је коначни резултат погрешан, због дуплирања међурезултата. Да је, уместо тога, одредио поделу истим начином размишљања као и у прва два случаја, у суштини би решио једноставнију варијанту проблема поена скоро читав век пре Паскала и Фермаа [5, стр. 8].

Лоренцо Форестани (Lorenzo Forestani) у делу „Пракса аритметике и геометрије“ (ит. Pratica d'Arithmetica e Geometria) из 1602. даје следећу живописну поставку проблема поена:

> Један већ постарији господин, нашавши се поново у свом летњиковцу, пошто је веома уживао у игри лоптом, позвао је два сеоска момка и рекао им овако: „Дајем вам 4 дуката да играте лопте у мом присуству. Желим да 4 дуката освоји онај ко први добије осам рунди“. И тако су они почели да играју. Када је један од њих победио у шест рунди, а други у три, изгубили су лопту, и нису могли да заврше игру, па им је господин рекао „Дајем вам новац да га поделите међу собом“. Поставља се питање колико следи сваком од њих.[8]

Подела коју је предложио се делимично ослања на Пачолијево решење, пошто Форестани сматра да улог најпре треба да се подели *pro rata* на основу резултата у тренутку прекида и максималног могућег броја игара, али додаје да би затим преостали део улога требало поделити на једнаке делове. Ако би се Форестанијев принцип применио на Пачолијев проблем, подела би била 7 : 4. Форестани у свом трактату критикује Пачолијево и Певеронеово решење, а у посебном одељку објашњава и грешку коју је начинио Франческо Пагани решавајући проблем поена у трактату „Корисна практична аритметика, вешто поређана“ (ит. Aritmetica pratica utilissima, artificiosamente ordinata) штампаном 1591. у Ферари.

Питање поделе улога у прекинутој игри се разматра у различитим писаним изворима све до XVII века. Начин на који су се третирали проблеми тзв. фер игре је, осим тога што је показао да су они решиви, уједно давао легитимност играма на срећу, чему су се оштро успротивиле католичка и протестанска црква у другој половини XVI века, што је довело до прекида развоја рачуна шанси у Италији.

Праведна подела за оригинални Пачолијев проблем је 7 : 1.

Прелазак у Француску

Средином XVII века игре са коцкицама су ушле у моду у Француској. Како је Париз тада географски и политички био веома далеко од Рима, црквена упозорења нису утицала на атмосферу у којој су проблеми игара на срећу могли да се решавају без страха од репресије. Истовремено, захваљујући достигнућима Вијета и Декарта, математика је била алат који је у потпуности могао да послужи

[8] Према транскрипцији професора Ричарда Палскемпа из оригиналног текста.

сврси. Гијом Госелин (фр. Guillaume Gosselin) превео је Тартаљин „Општи трактат" на француски, при чему је познато да су постојала бар два издања штампана у Паризу, једно из 1578, и друго из 1613.

Антоан Гомбо, витез де Мере (фр. Antoine Gombaud, Chevalier de Méré) се обично спомиње као коцкар који се обратио Паскалу са дилемама на које је наишао за коцкарским столом. Такво представљање је штетно поједностављивање приче о Гомбоу, који је био француски филозоф, писац[9] и значајан салонски теоретичар. Иако пореклом није био племић, узео је титулу витеза према лику из својих дијалога кроз чије је речи представљао сопствене ставове. Захваљујући свом шарму, добром укусу, умећу конверзације и коресподенције, де Мере је био омиљени салонски гост и пријатељ многих значајних личности свога времена, и врло је брзо постао особа од поверења на двору Луја XIV где је имао улогу саветника у деликатним ситуацијама и арбитра у конфликтима [7, стр. 409].

Блеза Паскала, филозофа[10], физичара и математичара[11] де Мере је, према сопственим речима, упознао током заједничког путовања у Поати, око 1651. године. Негде у то време Паскал је, након смрти свог оца Етјена, остао сам у Паризу и следеће три године је провео одлазећи на монденска места. Де Мере је сматрао да је делимично заслужан за Паскалово окретање „световном" животу. Извесно је да су били блиски познаници, па је могуће да су део заједничког времена проводили и за коцкарским столом, пошто је то била модерна забава и разбибрига, али нема доказа да су се страствено коцкали, посебно ако се узме у обзир да су се обојица изјашњавала против коцкања у записима који су остали иза њих.

Де Мере је, захваљујући сопственом искуству и познавању математике, побеђивао кладећи се да ће добити бар једну шестицу бацајући једну коцкицу четири пута. Али, испоставило се да слична рачуница не доноси зараду када је покушавао да добије дуплу шестицу бацајући две коцкице 24 пута. Иако је де Мере сматрао да су шансе веће од пола са 24 бацања, приметио је да је, у стварности, било потребно бацити коцкицу 25 пута. Како није успео да докучи разлог за то, обратио се свом пријатељу Пјеру де Каркавију (фр. Pierre de Carcavi), правнику који се математиком бавио из хобија. Де Каркави је био стари пријатељ Етјена Паскала, и самим тим близак са Блезом, па је извесно да је на тај начин питање стигло до њега [21, стр. 14]. Желевши да добије потврду да је дошао до решења, Паскал је даље контактирао Жила Робервала (фр. Gilles de Roberval), у то време веома цењеног математичара, али са његове стране није стигла подршка већ само критике. Наиме, Робервал је важио за највећег математичара у Паризу, али и за најнепријатнијег саговорника на свету. Потом се Паскал, уз посредовање де Каркавија, обратио Пјеру де Фермау, који се, живећи у Тулузу, налазио на маргинама математичког окружења. Правник који се у слободно време бавио математиком, Ферма, као и Паскал, није имао формално математичко

[9] Његови најпознатији есеји су „Поштен човек" (фр. L'honnete homme) и „Предавање о истинском поштењу" (фр. Discours de la vraie honneteté)

[10] Паскалова најпознатија дела су „Писма провинцијалцу" (фр. Les Provinciales), и постхумно објављене „Мисли" (фр. Pensées)

[11] Паскал није стекао никакво формално образовање, већ га је код куће подучавао отац, судија који се математиком бавио из ховија.

образовање, али је дао изузетно значајан допринос развоју математике.

Преписка

Многи сматрају преписку између Паскала и Фермаа из 1654. зачетком теорије вероватноће. Данас је познато да су разменили бар 7 писама. Прво је послао Паскал, негде у пролеће, али оно није сачувано. Фермаов одговор нема датум, но накнадно је утврђено да представља друго писмо у низу, и претпоставља се да је писано почетком јула. Из њега се закључује шта је био бар један од проблема које је разматрао Паскал:

> Ако сте се кладили да ћете добити изабрани број, на пример 6, бацајући једну коцкицу 8 пута, и уколико је игра морала бити прекинута после 3 бацања, како је праведно поделити улог?

Ферма разликује 2 случаја, али се оба своде на основни принцип да је вероватноћа добитка иста у сваком од 8 бацања и да не зависи од исхода претходних бацања. Вероватноћа добитка је $1/6$. У првој варијанти, улози су постављени и договор је да се не игра прво бацање. Онда је праведна компензација после неодиграног првог бацања $1/6$ улога. Након што се улог умањи за $1/6$, под условом да се играчи договоре да се не игра друго бацање, оно ће да вреди $1/6$ тренутног улога, тј. $5/36$ почетног улога. На тај начин следи да је четврто бацање вредно $125/1296$ почетног улога. Са друге стране, уколико играч после три бацања није добио жељени број, и уколико његов противник предложи да се не игра четврто бацање, и жели да надокнади пропуштену шансу постизања циља, онда је праведна надокнада $1/6$ почетног улога пошто се у овој другој ситуацији не мења почетни улог након што се одиграју прва три бацања.

У следећем писму, писаном 29. јула 1654, Паскал се слаже са Фермаовим расуђивањем и шаље проблем поена уз своје детаљно разматрање са предлогом решења. Кренуо је од анализе појединачних простијих случајева како би дошао до праведне поделе. Своје решење излаже рекурзивно, посматрајући игру два играча који играју на 3 добијене партије и разматрајући могуће исходе следећег бацања, да је оно одиграно.

Најпре дискутује ситуацију при резултату 2:1 за првог играча. Ако је четврто бацање добио први играч, крајњи резултат ће бити $3:1$, па први играч односи цео улог. У случају да га је добио други играч, резултат ће бити нерешен, па би оба играча имала једнаке шансе да у петом бацању освоје цео улог. Зато следи да би први играч свакако имао право на цео свој почетни улог, а како има 50% шанси да након петог бацања постане победник чиме би однео целокупан улог, онда, као додатак на свој почетни улог, треба да има право и на пола улога другог играча, односно треба да добије $3/4$ укупно положеног улога.

Ако је игра заустављена при резултату $2:0$ за првог играча, поново треће бацање, уколико га добије први играч, њему доноси победу и целокупан уложени новац. У случају да је то бацање добио други играч, резултат би био $2:1$, па, према претходној анализи, следи да тада први играч треба да добије $3/4$ улога. Како су његове шансе да се нађе у овој ситуацији 50%, онда би требало да има право на 3/4 од половине улога (односно на 3/8), што, заједно са 50% могућности да освоји цео улог (односно 4/8) значи да првом играчу следи 7/8 укупног улога.

Преостала је још ситуација када је игра прекинута при резултату 1 : 0 за првог играча. Уколико у следећем бацању поен припадне првом играчу, из претходне анализе је познато да он треба да добије 7/8 улога као поштену надокнаду. Ако поен припадне другом играчу, резултат би био 1 : 1, па како би играчи имали исти број поена, свако би освојио бар свој почетни улог. Из претходног Паскал закључује да је у овом случају поштено да се првом играчу додели 11/16 укупног улога пошто он свакако има право на цео свој улог (8/16), и још на половину новца од износа који прелази његов улог а могао би бити освојен у првом случају (1/2 од 3/8, тј. 3/16).

Ако се постави питање који део улога другог играча следује првом играчу након што освоји први, други односно трећи поен, долази се до закључка да први поен вреди 3/8 почетног улога другог играча, други поен још 3/8 и трећи поен 1/4 његовог улога.

На основу ове анализе и принципа математичке индукције, Паскал уопштава свој резултат и тврди да, када је потребно $n+1$ поена за победу, а у тренутку прекида игре резултат је $n:0$, онда вредност последњег, неодиграног, бацања износи $1/2^{n-1}$ губитниковог улога. Затим анализира ситуацију када се игра на n поена, а игра је прекинута после само једне рунде, покушавајући да одреди вредност првог поена изражену положеним улогом. У случају када се игра на 9 добијених поена, вредност првих 8 игара је изражена разломком

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot 15}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14\cdot 16}$$

односно, ако сваки од играча уложи број пистола[12] изражен производом парних бројева, добитнику следи онолики део почетног улога губитника који одговара производу непарних бројева. Да би се резултат уопштио на n бацања, треба искористити једнакости

$$2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n = 2^n\cdot n!,$$
$$1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}.$$

Ако се сада формира количник коме је именилац производ парних бројева, а бројилац производ непарних бројева, добија се разломак

$$(*)\qquad \frac{(2n)!}{2^n\cdot n!\cdot 2^n\cdot n!} = \frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot n!\cdot n!} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} = \frac{C_n^{2n}}{2^{2n}}.$$

Паскал затим напомиње да до овог резултата није дошао користећи претходно објашњен метод рекурзије, већ је морао да користи комбинације и затим наводи два тврђења, од којих прво и на француском и на латинском („пошто француски није добар“).

[12] Новчана јединица која се користила у то време

Према првом тврђењу, за произвољан скуп са $2n$ елемената важи следећа комбинаторна веза

$$\frac{1}{2}C_n^{2n} + C_{n+1}^{2n} + C_{n+2}^{2n} + \cdots + C_{2n}^{2n} = 2 \cdot 4^{n-1} = 2 \cdot 2^{2n-2} = 2^{2n-1}.$$

Паскал не даје доказ, али се из каснијих писама може закључити да је Ферма схватио да једнакост директно следи из структуре која је данас позната као Паскалов троугао, а која у троугаоном низу даје коефицијенте развоја бинома $(1+1)^n$, при чему је k-ти члан C_{k-1}^n. Из Паскаловог троугла се лако примећује да су чланови сваког појединачног реда симетрични у односу на средњи члан, или у односу на два међусобно једнака средња члана онда када их у реду има паран број, односно важи једнакост $C_k^n = C_{n-k}^n$.

Како развој $(1+1)^{2n}$ има непаран број чланова, претходно тврђење само дели средњи члан на пола и додаје тој половини збир свих чланова са једне стране тог средишњег члана. Јасно је да се исти резултат може добити одређивањем полузбира свих чланова развоја:

$$\frac{1}{2}(1+1)^{2n} = 2^{2n-1}.$$

Након овог аритметичког тврђења, Паскал наводи још једно које даје одговор на питање поделе улога након што је одиграно само једно бацање:

> Непходно је, најпре, рећи да, ако је неко освојио један од потребних 5 поена, и према томе, фале му 4, игра ће у потпуности бити одлучена у 8 бацања, односно у два пута по 4 бацања. Вредност првих 5 бацања (у смислу полагања права на део) од противниковог улога је разломак коме је у бројиоцу половина комбинација од 8 елемената класе 4 (узимам 4 зато што толико игара треба одиграти, а 8 зато што је двоструко веће од 4), а у имениоцу исти тај израз из бројиоца увећан за све преостале комбинације [11, стр. 405].

Пошто је, према првом тврђењу, збир у имениоцу једнак 2^7, вредност првих 5 бацања ће бити

$$\frac{\frac{1}{2}C_4^8}{2^7} = \frac{C_4^8}{2^8}.$$

Раније је показано (видети једнакост означену са $(*)$ да се до овог резултата може доћи и дељењем производа прва четири непарна броја производом прва четири парна броја.

Паскал у писму није детаљније објашњавао комбинације које је користио у извођењу, претпостављајући да Фермау нису потребна додатна појашњења. Дао је само две табеле у којима је приказао вредности сваког од n бацања за $n = 1,2,3,4,5,6$ и одговарајуће кумулативне вредности за свако од њих. Завршио је новим де Мереовимпитањем о шансама да се добије шестица са једном коцкицом из 4 бацања које су веће од шанси да се добију две шестице са две коцкице из 24 бацања, иако је $4 : 6 = 24 : 36$.Овај проблем нису даље разматрали, пошто су, изгледа, обојица сматрали да је де Мереова претпоставка била заснована на погрешном старом коцкарском правилу које користи идеју критичне вредности игре, најмањег броја потребних рунди таквих да је вероватноћа да ће играч добити бар једну рунду већа или једнака од једне половине[13].

[13] За детаље видети [21, стр. 17]

Фермаов одговор није сачуван. Из следећег Паскаловог писма види се да је Ферма био сагласан са коначним резултатом, али не и са начином на који је он добијен. Ферма је користио директније закључивање које се фокусирало на део укупног улога који осваја добитник прве рунде. Уколико је игра на n поена прекинута после првог бацања, добитнику тог бацања недостајаће још $n-1$ поена да освоји цео улог, па би настављена игра дала победника после највише $2n-2$ бацања. Како у сваком од њих може да победи било који играч, постоји 2^{2n-2} могућих исхода. Победу првом играчу доносе они исходи у којима је освојио бар $n-1$ поена. Да би се одредио њихов број, треба сабрати комбинације од $2n-2$ елемента класа $n-1$, n, $n+1$, $\dots$, $2n-2$ за шта се може искористити прво Паскалово тврђење

$$\frac{1}{2}C_{n-1}^{2n-2}+\frac{1}{2}C_{n-1}^{2n-2}+C_{n}^{2n-2}+C_{n+1}^{2n-2}+\cdots+C_{2n-2}^{2n-2}=\frac{1}{2}C_{n-1}^{2n-2}+2^{2n-3}.$$

Према правилу да играч који освоји први поен има право на онај део положеног улога који одговара количнику броја за њега повољних исхода и броја свих могућих исхода, његов део укупног улога је

$$\frac{\frac{1}{2}C_{n-1}^{2n-2}+2^{2n-3}}{2^{2n-2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{C_{n-1}^{2n-2}}{2^{2n-2}}+\frac{1}{2}.$$

Да би било очигледно да се Фермаов резултат слаже са Паскаловим, треба имати у виду да је Паскал одредио део губитниковог улога који следи добитнику, што управо одговара количнику у првом сабирку претходне једнакости.

Паскал је прихватио Фермаову аргументацију и пренео резултат заинтересованима у Паризу. Робервал је имао примедбу да решење није у складу са интуицијом – иако се игра могла завршити у мање бацања него што би највише било могуће одиграти, и Паскал и Ферма су разматрали ситуацију као да ће се увек играти сва. У случају када у игри учествују два играча, може се претпоставити да су се они једноставно договорили да одиграју сва бацања, без обзира да ли је постигнут резултат који је одредио победника много раније. Међутим, Паскал је схватио да се ситуација мења у случају да у игри учествују бар три играча. У свом писму од 24. августа 1654. он покушава да примени Фермаов метод комбинација на проблем поена у коме учествују три коцкара и наилази на препреку која не постоји када су у игри само двојица – сада се јављају ситуације у којима истовремено постоје два победника.

Паскал је изабрао игру која се игра на 2 добијена поена, и прекида је при резултату 1 : 0 : 0. Примењујући Фермаов метод, закључује да ће победник бити одлучен после највише три бацања, па постоји 27 могућих завршница игре.

> Лако је видети колико комбинација укупно има. То ће бити трећи степен броја 3; односно његов куб, илити 27. Јер, ако неко баци три коцкице истовремено (јер је неопходно бацати три пута), од којих свака има три могућа исхода (пошто су у игри тројица), и то таква да је један означен са a повољан за првог, један означен са b повољан за другог, и један означен са c повољан за трећег, очигледно је да те три коцкице бачене у исто време могу пасти на неки од следећих 27 различитих начина:

a	a	a	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	b	b	b	b	c	c	c	c	c	c	c	c	c
a	a	a	b	b	b	c	c	c	a	a	a	b	b	b	c	c	c	a	a	a	b	b	b	c	c	c
a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			1			1	1	1	1			1		
				2						2		2	2	2		2						2				
								3									3			3			3	3	3	3

Ако би се рачунало да је први играч победио у сваком исходу у ком има бар један поен, он би победио у 19 од могућих 27 случајева. Слично се закључује да други и трећи играч побеђују у по 7 случајева. Али збир та три дела је једнак 33, дакле већи је од 27, па Паскал додељује сваком играчу по пола поена, уколико је исход такав да у њему до потребних поена стижу два играча, иако му је јасно да то није исправно. Тако први играч добија један поен у 13 исхода у којима побеђује сам, и још пола поена за сваки од 6 исхода који су истовремено повољни за њега и још једног од преостала два играча, што је укупно 16. Друга два играча добијају по 4 поена за исходе у којима су искључиви победници и деле поене у 3 исхода, што је укупно 5,5. Паскал оваквом поделом није био задовољан, и сматрао је да је Фермаов метод погрешан, пошто је он, користећисвој рекурзивни начин, под претпоставком да ће се игра прекинути у тренутку када се добије победник, дошао до исправне поделе 17 : 5 : 5:

> Чини ми се да је ово начин на који је неопходно направити поделу са комбинацијама према Вашем методу, осим уколико бисте имали да додате још нешто на ову тему чега ја тренутно нисам свестан. Али, уколико не грешим, ова подела није праведна. Разлог лежи у томе што правимо погрешну претпоставку – да ће играти на три бацања без изузетка, уместо према природним условима ове игре, а то је да неће настављати игру, осим до тренутка када је један од њих стекао онај број поена који му недостаје, у ком случају се игра завршава. Није да им се не може десити да бацају коцкицу три пута, али им се може десити да одиграју само једно или два бацања и да немају потребу да играју поново.

Ферма разрешава Паскалову дилему кратким објашњењем у свом писму од 29. августа – ако у игри учествује више од 2 играча, треба водити рачуна о редоследу, што није било релевантно у игри два играча, а победник је онај ко први освоји потребан поен:

> Одговорићу, ипак, на Ваше питање о три особе које играју у два бацања. Када први има један (поен), а остали ниједан, Ваше прво решење је тачно, и подела улога треба да буде 17, 5 и 5. Разлог за ово је сам по себи очигледан и увек се следи исти принцип, док је из комбинација јасно да први има 17 шанси док преостала двојица имају само по пет.

Кратка преписка између Паскала и Фермаа помогла је да се поставе основе модерне теорије вероватноће, а 24. август 1654. се данас узима за датум (!) њеног настанка. Паскалова истраживања биномног развоја дала су потребан оквир за превођење основног принципа вероватноће, којег је диктирао здрав разум, у конкретан резултат: ако од n могућих исхода, за неког играча постоји p повољних, онда су његове шансе да победи једнаке p/n. Ферма је у суштини артикулисао Паскалову математику, али се кроз преписку чини као да је имао улогу професора који зна решење и помаже ученику да сам дође до њега. Свакако треба приметити да и ранији покушаји решавања проблема овог типа говоре у прилог томе да је, као што је то Лаплас приметио, рачун шанси само „оматематичено“

здраворазумско расуђивање. Да би се тај процес привео крају, било је потребно да се успостави веза између идеје вероватноће, која се користила у филозофији и теологији, са рачуном шанси. А одатле па до примене рачуна вероватноће у судници, затим за одређивање очекиване дужине живота и премија осигурања више није било тако тешко стићи, али су то неке друге приче које имају неке своје јунаке попут Кристијана Хајгенса, Џона Гронта, Јана де Вита, Едмунда Халеја, Пјера Ремона де Монтмора, Јакоба Бернулија, Абрама де Моавра, Томаса Бејза и многих других.

Литература

1. I. Todhunter, *History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Lagrange*, MacMillan and Co, Cambridge and London, 1865.
2. I. Abrahams, *Jewish Life in the Middle Ages*, The Macmillan Company, London, 1919.
3. E. T. Bell, *Men of Mathematics*, Touchstone, New York, 1937.
4. O. Ore, *Cardano – The Gambling Scholar*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1953.
5. M. G. Kendall, *Studies in the history of probability and statistics, II: The beginnings of a probability calculus*, Biometrika, 43(1/2):114, Jun 1956.
6. D. E. Smith, *History Of Mathematics II*, Dover Publications Inc, New York, 1958.
7. O. Ore, *Pascal and the Invention of Probability Theory*, Am. Math. Monthly, **67**, 5 (1960), 409–419.
8. F. N. David, *Games, Gods and Gambling*, Hafner Publishing Company, New York, 1962.
9. I. Schneider, *The Introduction of Probability into Mathematics*, Historia Mathematica 3, Canadian Society for the History and Philosophy of Mathematics, Elsevier, 1976, pp. 135–140.
10. Паусанија, *Опис Хеладе*, Матица српска, Нови Сад, 1994.
11. M. S. Mahoney, *The Mathematical Career of Pierre de Fermat 1601–1665*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2nd ed., 1994.
12. S. Sing, *Fermaova poslednja teorema*, DN Centar, Beograd, 1999.
13. C. C. Heyde, E. Seneta, *Statisticians of the Centuries*, Springer, New York, 2001.
14. A. Hald, *A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*, 2003.
15. A. Brown, *The Poker Face of Wall Street*, Wiley, New Jersey, 2006.
16. K. Devlin, *The Unfinished Game*, Basic Books, New York, 2008.
17. B. Paskal, *Umetnost ubeđivanja*, Službeni glasnik, Beograd, 2009.
18. *Herodotova istorija*, Dereta, Beograd, 2009.
19. S. N. Ethier, *The Doctrine of Chances – Probabilistic Aspects of Gambling*, Springer, 2010.
20. D. M. Burton, *The History Of Mathematics: An Introduction*, McGraw-Hill, New York, 2011.
21. P. Gorroochurn, *Classic Problems of Probability*, John Wiley & Sons, Inc, Hoboken, New-Jersey, 2012.
22. Š. Senjobos, *Uporedna istorija evropskih naroda*, Dereta, Beograd, 2013.

E-mail: `aleksandra.ravas@gmail.com`