НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ

LX, 1-2 (2015), 1–16

Др Милосав М. Марјановић

ЈЕДАН ПРИСТУП ИЗВОЂЕЊУ НАСТАВЕ АРИТМЕТИКЕ, V

Апстракт. Наставља се проучавање мултипликативне структуре блока бројева до 100 – успостављају се правила здруживања чинилаца, множење збира и разлике, уводи се дељење као операција чији смисао одређује мултипликативна схема коју прате задаци дељења: квотизација (количковање) и партиција (раздвајање), а затим се успостављају правила која истичу својства и ове операције: размена места делитеља и количника, дељење збира и разлике.

Користи се појам инваријантног записа правила аритметике па се та правила изражавају процедурално, реторички и симболички. У реалној настави предност се даје процедуралном изражавању и илустровању путем којег се истиче њихово интуитивно значење. Варирањем примера индукује се значење које деца поред инваријантних форми са конкретним бројевима лако изражавају и симболички. За продубљивање знања наставника, ова правила се везују за мултипликативне схеме и изводе радећи са словима као ознакама за променљиву.

На крају, детаљно се разрађује дељење са остатком, бројева до 20 са 2, бројева до 30 са 3, . . . , бројева до 90 са 9, а што треба да постане део усменог фонда који се користи код дељења вишецифрених бројева једноцифреним.

11.4.6. Остала својства множења. Почнимо напоменом да термини „збир“ и „производ“ имају двојака значења – једном их треба узимати са синтактичким значењем као записе а други пут семантички као бројеве које ти записи означавају. Број који је представљен једним производом (збиром) назива се *вредност* тог *производа* (*збира*), док уобичајена фраза „наћи вредност датог поизвода (збира)“ значи да тај дати запис треба заменити цифарским записом који представља тај исти број.

У једнакостима које ће изражавати својства множења користиће се заграде, а њихову функцију деца најбоље разумеју кроз активности где се оне користе. На пример кад је један чинилац и сам производ или збир, он се пише у заградама као што то бива са примерима у следећој вежби:

Пиши бројеве који недостају да изразиш да су

(i) *дати производи помножени са 7*

а) $3 \cdot 5$ б) $6 \cdot 2$ в) $4 \cdot 3$

$7 \cdot (\_ \cdot \_)$ $\_ \cdot (6 \cdot 2)$ $\_ \cdot (\_ \cdot \_)$, *итд.*

(ii) *дати бројеви помножени са* $3 \cdot 8$

а) 4 б) 3 в) 2

$(3 \cdot 8) \cdot \_$ $(\_ \cdot \_) \cdot 3$ $(\_ \cdot \_) \cdot \_$, итд.

Путем примера деца такође усвајају значење заграда као команде „израчунај прво оно што је у заградама“.

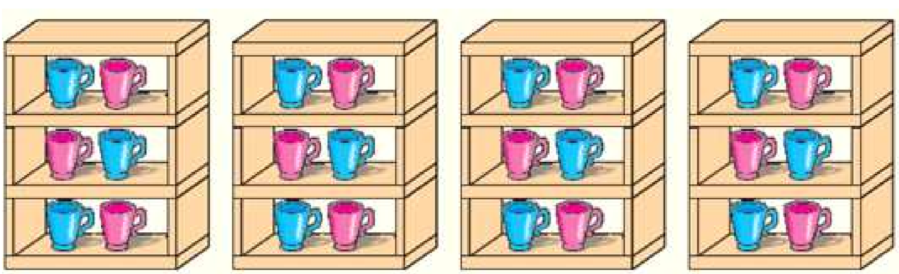
Израчунај

$2 \cdot (6 \cdot 5) = 2 \cdot \_\_ = \_\_$, $\quad (6 \cdot 5) \cdot 2 = \_\_ \cdot 2 = 2 \cdot \_\_ = \_\_$,

$6 \cdot (5 \cdot 2) = 6 \cdot \_\_ = \_\_$, итд.

11.4.6.1. Правило здруживања чинилаца. Напоменимо да сва правила аритметике која се издвајају на овом нивоу узимају се као интуитивно прихватљиве законитости које су саме по себи истините, па се не трудимо да ту истинитост доказујемо. Кад се ради о начинима издвајања ових правила прикладним за рад у разреду, примери које бирамо су конкретнији као што је, рецимо, следећи:

Гледај слике



Слика 53

Видиш 4 полице, свака има 3 преграде и на свакој прегради су 2 шоље. Број преграда је $\_\_ \cdot \_\_$, *а број шоља* $(4 \cdot 3) \cdot \_\_$. *У свакој полици је* $\_\_ \cdot \_\_$ *шоља. Укупно то је* $\_\_ \cdot (3 \cdot 2)$ *шоља. Број шоља записали смо једанпут као* $(4 \cdot 3) \cdot 2$, *а други пут као* $4 \cdot (3 \cdot 2)$. *Та два записа представљају један те исти број (број шоља), па пишемо једнакост* $(4 \cdot 3) \cdot 2 = 4 \cdot (3 \cdot 2)$.

Разрађујући овај пример даље, наставник настоји да демонстрира да ће добијена једнакост важити и кад се бројеви 4, 3, и 2 замене било којом другом тројком бројева. У том смислу задаје вежбе попут ове:

Шта би писао (писала) да је било

а) 6 *полица* б) 7 *полица* в) 9 *полица?*

$(\_\_ \cdot 3) \cdot 2 = 6 \cdot (\_\_ \cdot \_\_)$ $\quad (7 \cdot \_\_) \cdot \_\_ = 7 \cdot (\_\_ \cdot \_\_)$ $\quad (\_\_ \cdot \_\_) \cdot \_\_ = \_\_ \cdot (\_\_ \cdot \_\_)$.

Шта би писала (писао) да су биле

а) 4 *преграде* б) 6 *преграда* в) 8 *преграда*

$(4 \cdot \_\_) \cdot \_\_ = \_\_ \cdot (4 \cdot 2)$ $\quad (\_\_ \cdot 6) \cdot \_\_ = \_\_ \cdot (6 \cdot \_\_)$ $\quad (\_\_ \cdot \_\_) \cdot \_\_ = \_\_ \cdot (\_\_ \cdot \_\_)$.

а) 3 *шоље* б) 4 *шоље* в) 7 *шоља?*

$(\_\_ \cdot 3) \cdot 3 = \_\_ \cdot (3 \cdot 3)$ $\quad (\_\_ \cdot \_\_) \cdot 4 = \_\_ \cdot (\_\_ \cdot 4)$ $\quad (\_\_ \cdot \_\_) \cdot \_\_ = \_\_ \cdot (\_\_ \cdot \_\_)$.

Шта би писала (писао) да су биле 3 *полице, свака са* 6 *преграда и* 4 *шоље на свакој прегради?*

$$(\_\_\cdot\_\_)\cdot\_\_=\_\_\cdot(\_\_\cdot\_\_).$$

Путем оваквих вежби деца ће бити припремљена да прихвате правило здруживања чинилаца: *Здружујући чиниоце на било који од два начина вредност производа се не мења.*

11.4.6.2. Инваријантна форма правила аритметике. У претходном одељку успоставили смо једнакост $(4\cdot 3)\cdot 2=4\cdot(3\cdot 2)$ и уз додатне вежбе видели да она важи и кад се тројка 4, 3, 2 замени било којом другом тројком бројева. За такву аритметичку једнакост кажемо да има *инваријантну форму.* Једнакости као што су $7+9=9+7$, $7+(5+4)=(7+5)+4$, $8\cdot 6=6\cdot 8$ такође имају инваријантну форму а читаоцу је то јасно и из начина како смо те једнакости индуковали, јер у том индуковању све остаје исто кад се парови, односно тројке бројева које у њима фигуришу замене било којим другим. Једнакости као, на пример, $6+10=9+7$, $7+9=12+4$ су тачне али немају инваријантну форму, јер замењујући у њима само један број неким другим, таква једнакост престаје да буде тачна.

На пример једнакост $10-9=(10-5)-(9-5)$ је тачна и има инваријантну форму. Кад се користе слова да означе било коју другу тројку бројева добија се тачна једнакост коју изводимо на следећи начин.

У кутији је k кликера, од којих је m у боји, а међу њима n црвених. Безбојних је кликера $\underline{k-m}$. Уклањајући црвене кликере, остаје их $k-n$, а оних у боји $m-n$. Безбојних је $\underline{(k-n)-(m-n)}$. Једначећи два записа за број безбојних кликера, добијамо једнакост

$$k-m=(k-n)-(m-n).$$

11.4.6.3. Процедурално, реторичко и симболичко изражавање правила аритметике. Начин изражавања правила аритметике кад се користе посебни бројеви и једнакости пишу у инваријантном облику називамо *процедурално изражавање.* Напоменимо да је у времену пре креирања симболичке алгебре начин решавања једначина приказиван на једном конкретном примеру једначине, па се очекивало да ће се тако поступати и у свим другим случајевима. То су историјски примери изражавања одређених процедура путем конкретних случајева, па отуда за такво изражавање користимо придевску одредницу „процедуралан“.

Кад правило изражавамо речима за тај начин изражавања кажемо да је *реторички*, што је историјски везано за реторичку алгебру која је претходила симболичкој. А кад пишемо једнакости где произвољне бројеве означавамо словима, тада тај начин изражавања називамо *симболички.*

Да бисмо формирали правило здруживања чинилаца можемо да користимо модел кога чине k пакета од по m кутија, а у свакој кутији је по n кликера. Тада је број кутија $k\cdot m$, а број кликера $(k\cdot m)\cdot n$. С друге стране број кликера у сваком пакету је $m\cdot n$, па у k пакета то је $k\cdot(m\cdot n)$ кликера. Једначећи два записа за број кликера добијамо $(k\cdot m)\cdot n=k\cdot(m\cdot n)$. Овај модел са пакетима кутија у којима су кликери представља *мултипликативну схему за троструки* *производ* коју описујемо апастрактно као *k фамилија од по m скупова од којих сваки има n елемената.*

Свакако да и начин примене правила треба појаснити деци (за коју то не мора бити јасно као што је за нас одрасле). Најбољи начин да то урадимо је кроз вежбе које ћемо им наменити, као што је ова:

Мисли на

(1) *правило размене чинилаца*

(2) *правило здруживања чинилаца.*

Кад примењујеш правило (1)

на	*добијаш*	*и можеш да пишеш*
$3 \cdot 8$	$8 \cdot 3$	$3 \cdot 8 = 8 \cdot 3$
$7 \cdot 5$	$\_ \cdot \_$	$\_ \cdot \_ = 5 \cdot 7$
$4 \cdot (2 \cdot 5)$	$\_ \cdot (5 \cdot 2)$	$4 \cdot (2 \cdot 5) = \_ \cdot (\_ \cdot \_)$
$(3 \cdot 8) \cdot 4$	$(\_ \cdot \_) \cdot 4$	$(3 \cdot 8) \cdot 4 = (\_ \cdot \_) \cdot \_,$ итд.

Кад примењујеш правило (2)

на	*добијаш*	*и можеш да пишеш*
$(3 \cdot 5) \cdot 4$	$3 \cdot (5 \cdot 4)$	$(3 \cdot 5) \cdot 4 = \_ \cdot (\_ \cdot \_)$
$8 \cdot (5 \cdot 4)$	$(8 \cdot 5) \cdot 4$	$8 \cdot (5 \cdot 4) = (\_ \cdot \_) \cdot \_,$ итд.

Пиши у ( ) 1 *или* 2 *да назначиш које је правило примењивано*

$$4 \cdot 6 \overset{(\ )}{=} 6 \cdot 4,\ 3 \cdot (7 \cdot 2) \overset{(\ )}{=} (3 \cdot 7) \cdot 2,\ 3 \cdot (7 \cdot 2) \overset{(\ )}{=} 3 \cdot (2 \cdot 7),\ (5 \cdot 6) \cdot 7 \overset{(\ )}{=} (6 \cdot 5) \cdot 7, \quad \text{итд.}$$

Пример који следи има посебно важну улогу.

Мисли на

(1) *правило размене чинилаца*

(2) *правило здруживања чинилаца*

и пиши 1 или 2 да назначиш које је правило примењивано.

$$\begin{aligned} 3 \cdot (4 \cdot 5) &\overset{(\ )}{=} 3 \cdot (5 \cdot 4) \overset{(\ )}{=} (3 \cdot 5) \cdot 4 \overset{(\ )}{=} (5 \cdot 3) \cdot 4 \overset{(\ )}{=} 5 \cdot (3 \cdot 4) \overset{(\ )}{=} 5 \cdot (4 \cdot 3) \\ &\overset{(\ )}{=} (5 \cdot 4) \cdot 3 \overset{(\ )}{=} (4 \cdot 5) \cdot 3 \overset{(\ )}{=} 4 \cdot (5 \cdot 3) \overset{(\ )}{=} 4 \cdot (3 \cdot 5) \overset{(\ )}{=} (4 \cdot 3) \cdot 5 \overset{(\ )}{=} (3 \cdot 4) \cdot 5. \end{aligned}$$

Видиш да се чиниоци троструког производа могу здруживати на оба начина и произвољним редоследом.

Вероватно да ће наставник „уз помоћ својих ученика“ поређати све те редоследе:

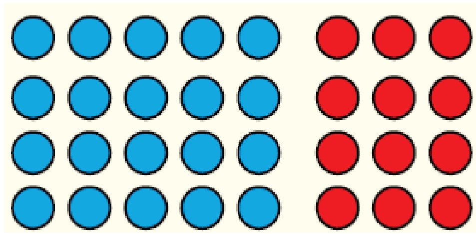
$$345,\ 354,\ 435,\ 453,\ 534,\ 543$$

и уочити одговарајуће парове једнакости $(3 \cdot 4) \cdot 5 = 3 \cdot (4 \cdot 5)$, $(3 \cdot 5) \cdot 4 = 3 \cdot (5 \cdot 4)$ итд.

У овом случају могло би се рећи да ми овим путем изводимо опште правило здруживања чинилаца на основу наведена два правила под (1) и (2). Ипак ово није формално извођење него једна вођена примена тих правила и сагледавање оног што је тим путем добијено. Уосталом, за децу овог узраста дедуктивно закључивање и није карактеристично.

11.4.6.4. Правила множења збира и разлике. Овде ћемо, као подесне, користити „правоугаоне слагалице“. На пример, деца раде следећу вежбу:

Гледај слагалицу



Слика 54

У сваком реду је 5 *плавих и* 3 *црвена кружића. У* 4 *реда је* $4\cdot(5+3)$ *кружића. У* 4 *реда је* $4\cdot 5$ *плавих и* $4\cdot 3$ *црвених кружића. Укупно то је* $4\cdot5+4\cdot3$ *кружића. Једначећи два записа за укупни број кружића, добијамо*

$$4\cdot(5+3)=4\cdot5+4\cdot3.$$

Варирајући број плавих и црвених кружића као и број редова, наставник припрема своје ученике да прихвате ово правило и кад се тројка 4, 5, 3 замени било којом другом тројком бројева (из блока S_{100}). (Видети разраду примера из одељка 11.4.6.1). Речима, правило множења збира изражавамо овако: *Множећи збир неким бројем, множимо сабирке тим бројем па те производе саберемо.*

Користећи исту слагалицу (сл. 54) број плавих кружића пишемо на два начина као $\underline{4\cdot(8-3)}$ и $\underline{4\cdot8-4\cdot3}$. Једначењем тих записа добија се

$$4\cdot(8-3)=4\cdot8-4\cdot3.$$

Опет се варирањем тројке 4, 8, 3 добијају једнакости овог истог типа, а након таквих вежбања деца прихватају правило множења разлике: *Разлика се множи неким бројем тако што се помноже тим бројем умањеник и умањилац па се ти производи одузму.*

На крају за успостављање правила о множењу збира користимо модел који чине k кутија где је у свакој m плавих и n црвених кликера. У кутији је $m+n$ кликера, а у k кутија то је $k\cdot(m+n)$ кликера. У свакој од k кутија је по m плавих кликера а то је $k\cdot m$ кликера и по n црвених па је то $k\cdot n$ кликера. Укупно то је $k\cdot m+k\cdot n$ кликера. Једначењем два записа за укупни број кликера добијамо

$$k\cdot(m+n)=k\cdot m+k\cdot n.$$

Слично, кад је у свакој од k кутија m плавих и црвених кликера од којих је n црвених. Број плавих кликера можемо писати на два начина $k\cdot(m-n)$ и $k\cdot m-k\cdot n$, па једначећи ове записе, добијамо

$$k\cdot(m-n)=k\cdot m-k\cdot n.$$

Тако смо формирали правила множења збира и разлике у симболичкој форми.

11.5. Коментар

Нека од наведених правила су аксиоме поља као што су правила размене места сабирака или чинилаца (комутативни закони за сабирање и множење) и правило множења збира (дистрибутивни закон). Напоменимо да се из комплетног списка аксиома поља могу извести сва својства сабирања и множења. У дидактици успостављамо правила аритметике као принципе који стоје независно један од другог, а важнији су они који се чешће примењују.

Кад се слова користе као ознаке за произвољне бројеве, добијено правило очигледно не зависи од посебних вредности тих слова. Али ми сматрамо да је прихватљивије за децу да се та правила успоставе радећи са конкретним бројевима и да се кроз вежбе варирања види да она остају да важе кад се на одговарајући начин ти бројеви замене произвољним другим. Тек после таквих вежби може се од деце захтевати да такве једнакости испишу користећи слова. Ми сматрамо да коришћење слова и, уопште, елементи ране алгебре представљају можда најзначајнију обнову наставе аритметике која ће као таква постепено стицати своје место и добијати своје право обликовање.

И најзад, приметимо да се једначење различитих записа за исти број заснива на Канторовом принципу инваријантности броја, а што значај тог принципа посебно истиче.

11.6. Дељење у блоку бројева до 100

Кад наставник обрађује таблицу нножења и пита, на пример,

– којим бројем треба помножити 7 да се добије 56,

– који број кад се помножи са 7 даје 56, итд.

онда су то задаци дељења у имплицитном облику.

Кад се у настави математике рано, тј. већ од првог разреда почне да користи „x“ као ознака за непознати број и кад се „решавају“ најједноставнији облици једначина $x+a=b$, $a+x=b$, $a\cdot x=b$, $x\cdot a=b$), онда се то може користити да се решавају задаци одузимања и дељења у имплицитном облику. Уместо исказивања питања речима лакше је то радити захтевом да се „решавају“ једначине, као на пример:

Одреди x

$$\begin{array}{cccc} 5\cdot x=35 & x\cdot 6=36 & x\cdot 8=48 & 7\cdot x=56 \\ x=\_\_ & x=\_\_ & x=\_\_ & x=\_\_,\ \textit{итд.} \end{array}$$

Користи таблицу множења која је штампана у твојој књизи да провериш своје одговоре.

Често се узима да је сврха једначина решавање текстуалних проблема. Но тада такве једначине треба решавати формално (тј. на ефикасан начин), а што не може бити случај са решавањем једначина у нижим разредима основне школе. У овом раном периоду сврха једначина је коришћење слова као ознаке за непознати (тражени) број. Али и то се деци саопштава на неки стварнији начин да би она усвојила ту улогу слова. На пример:

– Шака је затворена и у њој су лешници. Не знамо колико је лешника па тај број означавамо са x (слово икс). Кад се шака отвори видимо да је 6 лешника, пишемо $x = 6$ (дајући тако смисао овој једнакости).

– Кутија са оловкама је затворена, не знамо колико је у њој оловки и тај број означавамо са x. Кад се кутија отори и оловке преброје, пишемо $x = 10$.

– Не знамо одмах који број кад се помножи са 7 даје 56, па га означавамо са x. Да је тај број помножен са 7 пишемо $7 \cdot x$ а да то износи 56 пишемо $7 \cdot x = 56$. Кад погледамо у штампаној таблици множења, видимо да је x број 8, па пишемо $x = 8$.

(Са оваквим примерима и њима сличним множење са x, тј. овде израз $7 \cdot x$ стиче одређени смисао као и једнакости као што је овде $7 \cdot x = 56$).

Ово је само краћи осврт и нећемо улазити у детаље који би представљали разраду теме „једначине“. Израз „решавање једначина“ је претенциозно употребљавати у овом контексту где се једначине користе да би се словом обележавао непознати број који варира од примера до примера стичући смисао променљиве која пролази кроз одређени скуп вредности (нпр. блок бројева до 100). На овом нивоу, развијање идеје о променљивој је много важније од решавања текстуалних задатака једначинама (а што би такође био један пеурађени дидактички задатак).

Размишљајући о начину увођења дељења могли бисмо поступити формално: Број x у једначини $7 \cdot x = 56$ означавамо са $56 : 7$ и овај запис читамо „56 подељено са 7“, итд. Међутим, ако та операција треба да стекне дубљи смисао треба је везати за примере мултипликативне схеме коју прати задатак дељења. Кад имамо фамилију од m једнакобројних скупова од којих сваки сдржи n елемената и кад је укупан број тих елемената p, па кад су дати бројеви p и m а тржи се број n, тај број означавамо са $p : m$ а овај задатак дељења називамо *квотизација* (*количовање*), док кад су дати бројеви p и n а тражи се број m, тај број означавамо пишући $p : n$, а овај задатак дељења називамо *партиција* (*раздвајање* на једанаке делове).

И код дељења у почетку се задржавамо на вежбама где се тражени бројеви само записују (а не рачунају).

Купљено је 48 оловки у 6 кутија, Колико је то оловки у свакој кутији: ___ : __?

Купљено је 48 оловки у кутијама које садрже по 8 оловки. Колико је то кутија: ___ : __?

Запис 48 : 6 читаш „48 подељено са 6“, а запис 48 : 8 читаш „_________“.

Први задатак у овом примеру је количовање, док је други раздвајање.

Купљено је 56 садница које треба посадити у 7 једнаких редова. Колико је то садница по реду: ___ : __?.

Купљене су 72 саднице које треба посадити по 8 у сваком реду. Колико је то редова: ___ : __?

Запис 56 : 7 читамо „_________“ а запис 72 : 8 читамо „_________“.

После једног броја оваквих примера, прелази се на „рачунање“, тј. деца се ослањају на знање таблице множења да записе у виду количника изједначе са њиховом вредношћу израженом у цифарском запису.

Којим бројем множиш

број	*да добијеш*	*Тај број је*	*па пишеш*
6	48	__	$48 : 6 = 8$
8	48	__	$48 : 8 =$ __
7	56	__	___ : __ = __
8	72	__	___ : __ = __, итд.

11.6.1. Веза између множења и дељења. Следећа вежбања служе да се искажу везе између множења и дељења.

Кад знам да је	*тада без рачунања пишем*	*или*
$4 \cdot 7 = 28$	$28 : 4 = 7$	$28 : 7 = 4$
$5 \cdot 8 = 40$	$40 : 5 =$ __	$40 : 8 =$ __
$6 \cdot 9 = 54$	$54 : 6 =$ __	$54 : 9 =$ __
$8 \cdot 9 = 72$	72 : __ = __	72 : __ = __, итд.

11.6.2. Веза између дељења и множења. Вези дељења и множења намењују се вежбе попут ове:

Кад размислим колико је	*и нађем да је*	*без рачунања пишем*
$36 : 4$	9	$4 \cdot 9 = 36$
$36 : 9$	4	$9 \cdot 4 =$ ___
$64 : 8$	8	$8 \cdot 8 =$ ___
$72 : 9$	8	__ · __ = ___, итд.

Ове и овакве вежбе су такође вид провере да је задатак дељења исправно урађен.

11.6.3. Размена места дељеника и количника. У сврху уочавања и коришћења овог својства састављају се вежбања попут овог:

Кад проверим да је	*пишем без провере*	*и*
$45 : 9 = 5$	$9 \cdot 5 = 45$	$45 : 5 = 9$
$42 : 7 = 6$	$7 \cdot 6 =$ ___	42 : __ = __
$63 : 9 = 7$	$9 \cdot 7 =$ ___	$63 : 7 =$ __, итд.

У овим вежбањима количник се веже за производ а преко тог, производ за други запис количника настао разменом места делитеља и количника. После ових вежбања следе она где се размена места делитеља и количника врши непосредно.

Кад провериш да је	*без провере можеш да пишеш*
$63 : 9 = 7$	$63 : 7 =$ __
$63 : 7 = 9$	$63 : 9 =$ __
$90 : 10 = 9$	$90 : 9 =$ ___, итд.

Напоменимо да је својство размене места делитеља и количника код дељења кореспондентно својству размене места чинилаца код множења.

11.6.4. Општи вид везе множења и дељења. Често се каже да је дељење операција супротна множењу. Ту везу исказујемо са више прецизности кад кажемо да чим је тачна једна од једнакости

$$m \cdot n = p, \quad p : m = n, \quad p = m \cdot n, \quad n = p : m,$$
$$n \cdot m = p, \quad p : n = m, \quad p = n \cdot m, \quad m = p : n,$$

тачне су и остале при чему су овде укључена својства размене чинилаца и својство размене делитеља и количника уз својство рефлексивности једнакости. Стриктније говорећи, искључиво веза две операције своди се на то да чим је тачна једна од релација

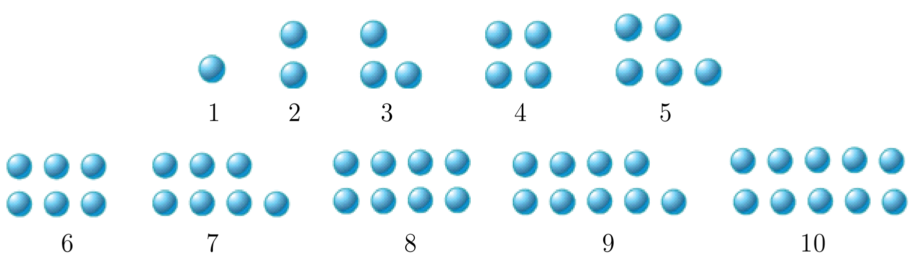
$$m \cdot n = p, \qquad p : m = n,$$

тачна је и она друга.

Напоменимо да операција дељења није асоцијативна јер, на пример, једнакост $(9 : 3) : 3 = 9 : (3 : 3)$ није тачна и сличне једнакости које би изражавале асоцијативност дељења не би биле тачне у многим другим случајевима.

11.6.5. Дељивост са 2, 3, 4 и 5. Представљаући дељивост, служићемо се бројевним сликама којима ћемо представити дељивост са 2, а затим са сваким од бројева 3, 4 и 5 понаособ.

Гледај слике



Слика 55

Видиш да су бројеви $2, 4, 6, 8$ *и* 10 *дељиви са* 2*:* $2 : 2 =$ __, $4 : 2 =$ __, $6 : 2 =$ __, $8 : 2 =$ __, *и* $10 : 2 =$ __.

Можеш да пишеш те једнакости и овако: $2 = 2 \cdot 1$, $4 = 2 \cdot 2$, $6 = 2 \cdot 3$, $8 = 2 \cdot$ __, $10 = 2 \cdot$ __.

Бројеви $1, 3, 5, 7$ *и* 9 *нису дељиви са* 2*, па можеш да пишеш једнакости:* $3 = 2 \cdot 1 + 1$, $5 = 2 \cdot 2 + 1$, $7 = 2 \cdot$ __ $+ 1$, $9 = 2 \cdot$ __ $+$ __.

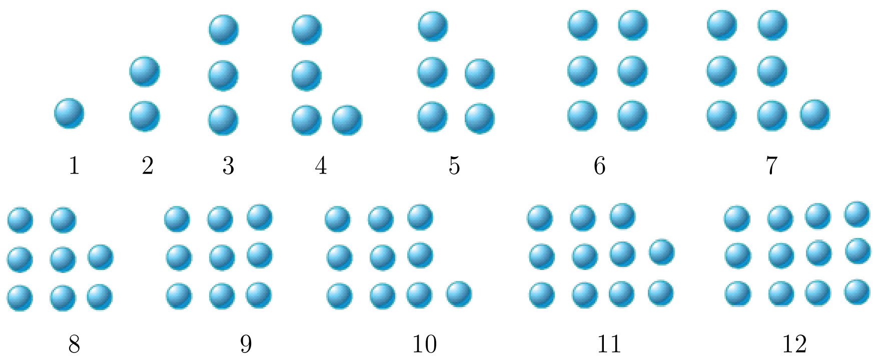
Продужујући можеш да пишеш

$11 = 2 \cdot 5 +$ __, $12 = 2 \cdot$ __, $13 = 2 \cdot 6 +$ __, $14 = 2 \cdot$ __, $15 = 2 \cdot$ __ $+ 1$, $16 = 2 \cdot$ __, $17 = 2 \cdot$ __ $+$ __, $18 = 2 \cdot$ __, $19 = 2 \cdot$ __ $+$ __, $20 = 2 \cdot$ ___.

Међу овим бројевима дељиви су са 2*:* ___, ___, ___, ___, ___.

Наставник подстиче ученике да запазе да су бројеви дељиви са 2 производи броја 2 и неког другог броја. Такође подсећа да се за те бројеве каже да су *парни*, док оне који нису дељиви са 2 називамо *непарни бројеви*.

Гледај слике



Слика 56

Видиш да су бројеви $3, 6, 9$ *и* 12 *деиви са* 3*:* $3 : 3 = 1$, $6 : 3 = \_\_$, $9 : 3 = \_\_$, $12 : 3 = \_\_$, *а ове једнакости можеш да пишеш и овако:* $3 = 3 \cdot 1$, $6 = 3 \cdot \_\_$, $9 = 3 \cdot \_\_$, $12 = 3 \cdot \_\_$.

Бројеви $12, 4, 5, 7, 8, 10, 11$ *нису дељиви са* 3 *па можеш да пишеш једнакости:* $4 = 3 \cdot 1 + 1$, $5 = 3 \cdot 1 + 2$, $7 = 3 \cdot 2 + \_\_$, $8 = 3 \cdot 2 + \_\_$, $10 = 3 \cdot 3 + \_\_$, $11 = 3 \cdot 3 + \_\_$.

Пиши бројеве дељиве са 3 *од* 3 *до* 30*:* $3, 6, 9, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_$, *па истичући дељивост са* 3 *пишеш:* $3 = 3 \cdot 1$, $6 = 3 \cdot 2$, $9 = 3 \cdot \_\_$, $12 = 3 \cdot \_\_$, $15 = 3 \cdot \_\_$, $18 = 3 \cdot \_\_$, $21 = 3 \cdot \_\_$, $24 = 3 \cdot \_\_$, $27 = 3 \cdot \_\_$, $30 = 3 \cdot \_\_\_$.

Запажаш да кад је број дељив са 3 *може да се напише као производ броја* 3 *и неког дугог броја.*

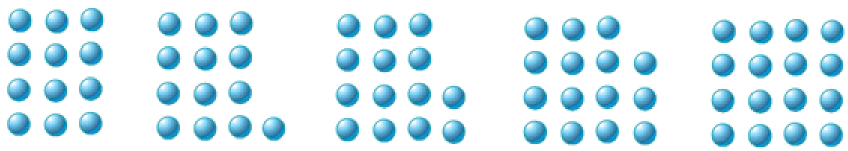
Бројеви: $7, 8; 16, 17; 25, 26$ *нису дељиви са* 3 *па пишеш једнакости:* $7 = 3 \cdot 2 + 1$, $8 = 3 \cdot 2 + 2$*;* $16 = 3 \cdot \_\_ + 1$, $17 = 3 \cdot \_\_ + 2$*;* $25 = 3 \cdot \_\_ + 1$, $26 = 3 \cdot \_\_ + 2$.

Видимо да кад бројеви нису дељиви са 3 *без остатка, као остатак буду бројеви* 1 *или* 2.

Слично обрађујемо дељивост са 4 и 5.

Пиши бројеве који су дељиви са 4*:* $4, 8, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, 40$, *па пишеш* $4 = 4 \cdot 1$, $8 = 4 \cdot 2$, $12 = 4 \cdot 3$, $\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$, $40 = 4 \cdot 10$.

Гледај слике



12 13 14 15 16

Слика 57

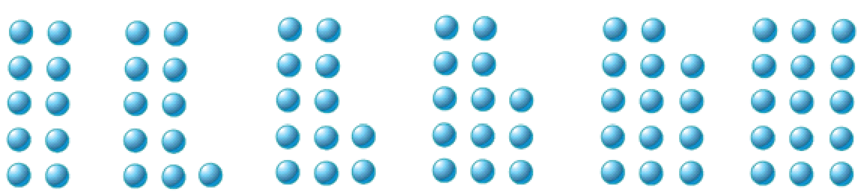
Пишеш: $12 = 4 \cdot 3$, $13 = 4 \cdot 3 + 1$, $14 = 4 \cdot \_\_ + \_\_$, $15 = 4 \cdot \_\_ + \_\_$, $16 = 4 \cdot \_\_$.

Видимо да кад бројеви нису дељиви са 4 *без остатка, остатак буде* $1, 2$ *или* 3.

А уз дељивост са 5 имамо:

Пиши бројеве дељиве са 5*:* $5, 10, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, 50$*. Пиши и једнакости:* $5 = 5 \cdot 1$, $10 = 5 \cdot 2$, $15 = 5 \cdot \_\_$, $20 = 5 \cdot \_\_$, $25 = 5 \cdot \_\_$, $30 = 5 \cdot \_\_$, $35 = 5 \cdot \_\_$, $40 = 5 \cdot \_\_$, $45 = 5 \cdot \_\_$, $50 = 5 \cdot \_\_\_$.

Гледај слике



10 11 12 13 14 15

Слика 58

Пишеш

$$10 = 5 \cdot 2, \;\; 11 = 5 \cdot 2 + 1, \;\; 12 = 5 \cdot \_\_ + 2, \;\; 13 = 5 \cdot \_\_ + 3, \;\; 14 = 5 \cdot 2 + 4, \;\; 15 = 5 \cdot 3.$$

Видиш да бројеви $11, 12, 13, 14$ *нису дељиви са* 5 *без остатка. За* 11 *остатак је* 1*, за* 12 *је* 2*, за* 13 *је* 3 *и за* 14 *је* 4*.*

Наставник подстиче запажање да је број дељив са 4 одн. са 5 кад се може написати као производ броја 4, одн. 5 и неког другог броја. Такође подстиче запажање да је остатак увек мањи од броја са којим се дели.

За увежбавање овог градива и усмено извођење дељења са остатком, наставник припрема и следеће вежбе:

Једнакости

$$17 = 4 \cdot 4 \cdot +1, \quad 23 = 4 \cdot 5 + 3, \quad 32 = 5 \cdot 6 + 2, \quad 39 = 5 \cdot 7 + 4, \quad \text{итд.}$$

пишемо и овако

$$\underset{1}{\underline{17}} : 4 = 4, \qquad \underset{3}{\underline{23}} : 4 = 5, \qquad \underset{2}{\underline{32}} : 5 = 6, \qquad \underset{4}{\underline{39}} : 5 = 7, \quad \text{итд .}$$

и читамо: 17 *подељено са* 4 *је* 4 *и остатак је* 1*,* 23 *подељено са* 4 *је* 5 *и остатак је* 3*,* 32 *подељено са* 5 *је* 6 *и остатак је* 2*,* 39 *подељено са* 5 *је* 7 *и остатак је* 4*.*

11.6.6. Дељивост са 6, 7, 8 и 9. На сличан начин као што је скицирана обрада дељивости са 4 и 5, обрађује се дељивост са 6 бројева до 60, са 7 бројева до 70, са 8 бројева до 80 и са 9 бројева до 90. И овде се запажа (а не дефинише) да је број дељив са 6 кад је производ броја 6 и неког другог броја и тако иде и исказивање дељивости са 7, 8 и 9. Ово је типично за учење кроз активности кроз које ученик формира своје знање.

Важно је напоменути да се ова обрада дељивости не подудара са оном где се изводе правила кад је број дељив са 2, са 3 итд. Циљ ове теме је дељење са остатком, бројева до 20 са 2, бројева до 30 са 3, ... , бројева до 90 са 9. Типичне вежбе су попут ове:

Рачунај и пиши шта треба

(i) $\underline{17} : 2 = \_\_$, (ii) $\underline{26} : 3 = \_\_$, (iii) $\underline{37} : 4 = \_\_$, (iv) $\underline{44} : 5 = \_\_$,

(v) $\underline{56} : 6 = \_\_$, (vi) $\underline{67} : 7 = \_\_$, (vii) $\underline{78} : 8 = \_\_$. (viii) $\underline{88} : 9 = \_\_$, итд.

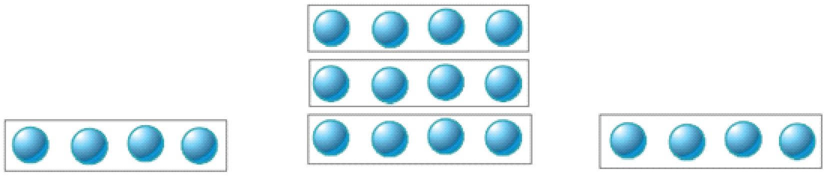
Кад се увежба дељење са остатком тада те вежбе треба изводити као усмено рачунање. И као што је таблица множења обавезан усмени фонд који се претпоставља код извођења множења вишецифрених бројева једноцифреним, тако је и ово дељење са остатком обавезан усмени фонд за дељење вишецифрених бројева једноцифреним. Значај ове теме објашњава и дужину њене обраде у овом чланку.

11.6.7. Даља својства везана за однос множења и дељења. Множећи неки број другим (већим од 1) добија се већи број. А делећи га, добија се мањи број. Тај смисао везан за две операције, множење и дељење, долази до изражаја кад се каже да су оне супротне једна другој. То прецизније изражавамо једнакостима где неки број прво множимо (делимо) неким другим бројем па затим делимо (множимо) тим истим бројем.

Из релација
$$p = m \cdot n, \quad p : m = n, \quad p : n = m$$
кад се у другој и трећој од њих p замени са $m \cdot n$ добија се
$$(m \cdot n) : m = n, \quad (m \cdot n) : n = m.$$
Кад се у првој од њих n замени са $p : m$, а m са $p : n$, добија се
$$p = m \cdot (p : m), \quad p = (p : n) \cdot n.$$
Односно, друкчије писано
$$(p : m) \cdot m = p, \quad (p : n) \cdot n = p$$
а што је једна те иста једнакост.

Кад се обрађују ова својства у реалној настави, очигледност која се постиже коришћењем бројевних слика и рад са посебним бројевима долазе у обзир, а не овакви формални поступци.

Гледај слику



4 $3\cdot 4$ $(3\cdot 4):3$

Слика 59

Кад 4 *множимо са* 3 *добијамо* $3\cdot 4$*, а кад* $3\cdot 4$ *делимо са* 3 *добија се* $(3\cdot 4):3$*, а то је* 4*. Пишемо једнакост*

$$(3\cdot 4):3=4.$$

Да смо множили

са	*писали бисмо*
4	$(4\cdot 4):4=4$
5	$(5\cdot 4):5=\_\_$
6	$(6\cdot 4:\_\_)=\_\_$
7	$(\_\_\cdot 4):\_\_=\_\_$, *итд.*

Да смо множили

број	*писали бисмо*
5	$(3\cdot 5):3=5$
6	$(3\cdot 6):\_\_=\_\_$
7	$(3\cdot \_\_):\_\_=\_\_$
8	$(\_\_\cdot \_\_):\_\_=\_\_$, *итд.*

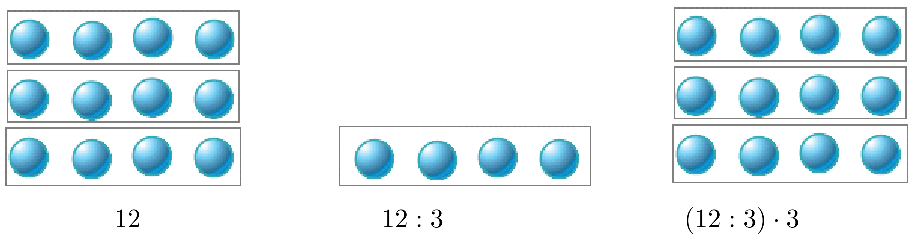
Да смо множили

са	*број*	*писали бисмо*
4	5	$(4\cdot 5):4=\_\_$
6	7	$(6\cdot \_\_):\_\_=\_\_$
7	5	$(\_\_\cdot 5):\_\_=\_\_$
8	9	$(\_\_\cdot \_\_):\_\_=\_\_$, *итд.*
m	n	$(m\cdot n):m=\_\_$.

Деца која су научила да користе слова као ознаке за произвољне бројеве лако ће допунити једнакост у последњем реду претходне вежбе. Деца такву једнакост не изводе (као што смо то ми урадили) јер је то карактеристично за дедуктивно мишљење, него то својство индукују из низа примера записујући га у низу случајева у инваријантном облику, па га на крају словно (симболички) изражавају.

Такође случај кад се неки број дели па затим множи истим бројем обрађујемо на сличан начин.

Гледај слику



Слика 60

Кад 12 *поделиш са* 3, *па број* $12:3$ *помножиш са* 3 *добијаш* $(12:3)\cdot 3$. *Видиш да је то* 12 *и пишеш*

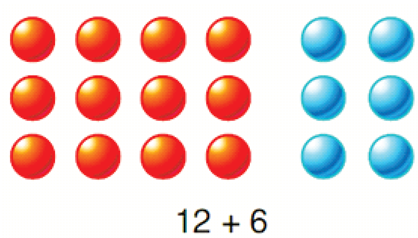
$$(12:3)\cdot 3 = 12.$$

Варирањем, заменом пара 12, 3 провима 15, 3; 18, 3; 21, 3 итд. као и паровима 12, 2; 12, 4; 12, 6, а затим било којим другим паром бројева где је први од њих дељив другим од њих разрађује се наведени пример и индукује словни запис $(m:n)\cdot n = m$.

Читалац ће свакако разумети зашто инсистирамо да је први број у овим паровима дељив оним другим. Кад није тако и кад, на пример, пишемо $(17:4)\cdot 4 = 17$ онда је ова једнакост тачна у скупу рационалних и реалних бројева. Међутим, у скупу природних бројева она није нити тачна нити нетачна. У том скупу она је бесмислена! (У скупу природних бројева запис $17:4$ нема смисла као природни број, па нити то има израз $(17:4)\cdot 4$.

11.6.8. Дељење збира и разлике. И овде правила индукујемо посматрајући посебне случајеве и њихове илустрације.

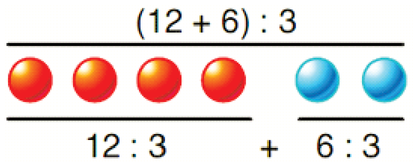
Три другара деле 12 *црвених и* 6 *плавих кликера.*



Слика 61

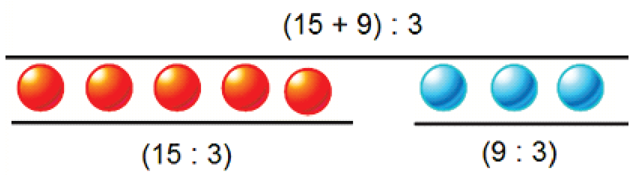
Сваки од њих добија $(12+6):3$ *кликера. Сваки од њих добија* $12:3$ *црвених и* $6:3$ *плавих кликера, а то је* $12:3+6:3$ *кликера. Можеш да пишеш*

$$(12+6):3 = 12:3+6:3.$$



Слика 62

Замисли слагалицу са 15 *црвених и* 9 *плавих кликера. Сваки од њих добија*



Слика 63

Можеш да пишеш

$$(15+9) : 3 = \_\_\_ : \_\_ + \_\_ : 3.$$

После једног броја овако обрађених примера кад се слагалице или виде или замишљају, деци се задају вежбе попут следеће.

Пиши бројеве који недостају

$$(16+19) : 2 = 16 : 2 + 10 : 2 = \_\_ + \_\_ = \_\_\_.$$
$$(36+42) : 6 = \_\_\_ : \_\_ + \_\_\_ : \_\_ = \_\_ + \_\_ = \_\_\_,$$
$$(48+32) : 8 = \_\_\_ : \_\_ + \_\_\_ : \_\_ = \_\_ + \_\_ = \_\_\_, \text{ итд.}$$

Слични примери се користе и да се обради дељење разлике. Наведимо још извођење тих правила у општем облику, користећи модел са кутијама у којима су двобојни кликери.

У свакој од k кутија налази се једнак број црвених и плавих кликера. Укупно црвених кликера је m а плавих n. У једној кутији је $(m+n) : k$ кликера. У једној кутији је $m : n$ црвених и $n : k$ плавих кликера, а то је $m : k + n : k$ кликера. Једначећи записе за број кликера у једној кутији, добијамо

$$(m+n) : k = m : k + n : k.$$

У свакој од k кутија налази се једнак број црвених и плавих кликера. Укупно, то је n кликера од којих су њих m плавих. Црвених кликера је $m - n$, а у једној кутији их је $(m-n) : k$. У једној кутији је $m : k$ кликера, њих $n : k$ су плави, а црвених је $m : k - n : k$. Једначећи два записа за број црвених кликера , добијамо

$$(m-n) : k = m : k - n : k.$$

Наведимо још примере који показују примену првог од ових правила на дељење у скупу S_{100}.

Рачунај

$39 : 3 = (30 + 9) : 3 = 30 : 3 + 9 : 3 =$ ___ $+$ __ $=$ ___,

$52 : 4 = (40 + 12) : 4 =$ ______________________________,

$91 : 7 = (70 + 21) : 7 =$ ______________________________, итд.

САНУ, Београд, Кнеза Михаила 35
E–mail: `milomar@beotel.net`