Др Павле Миличић

О НЕЈЕДНАКОСТИ ТРОУГЛА У АКСИОМАТИЦИ ЕУКЛИДСКЕ ГЕОМЕТРИЈЕ ЗА СРЕДЊЕ ШКОЛЕ

Неспоран је велики значај тврђења о неједнакости троугла у свој математици. Зато би ово тврђење требало увести, у настави еуклидске геометрије средње школе, на адекватан начин. За такво увођење Хилбертова аксиоматика еуклидске геометрије, за средњошколце, није погодна, тешка је. Из тих разлога је академик А. Н. Колмогоров предложио прикладнију аксиоматику, коју приказујемо.

Добро је познато сваком предавачу еуклидске геометрије (ЕГ) да се ниједан њен курс не може солидно реализовати без адекватне аксиоматике. То је било познато још Еуклиду (око 330. до 275. г. п.н.е) који је садржај својих епохалних *Елемената* изложио аксиоматски. Нећемо се овде бавити разним недостацима његове аксиоматике (постулата и аксиома). Неки од тих недостака били су познати већ његовим настављачима, као што је Архимед који је Еуклидовим постулатима додао 5 нових метричких. Али касније, прошли су многи векови, нових принципијелних помака у аксиомама и доказима из Еуклидових *Елемената* није било. У својој капиталној књизи [2] Н. В. Јефимов каже: „Строгост Еуклидових доказа до 19. века је била довољна. Тек крајем тог века појавио се комплетан систем аксиома на основу кога се логички исправно могла изградити еуклидска геометрија“. Појавила се тзв. *Хилбертова аксиоматика* (ХА) 1899. године. Том аксиоматиком дефинитивно су направљене темељне основе ЕГ на највишем нивоу. Она је постала узор за стварање аксиоматика и других математичких дисциплина.

Али, ако се ради о настави геометрије у средњим школама, потпун систем Хилбертових аксиома није препоручљив. Из следећих разлога.

Настава било које геометрије, па и других математичких предмета, не може почети без појма *мере дужи и мере угла.* Чак и у настави ЕГ на математичким факултетима увођење ових појмова на основу ХА подударности, претставља тежак задатак. Студенти једва могу да усвоје доказе постојања и јединствености појма дужине дужи. При томе се користи основни појам ХА – релација „*бити између*“. О Хилбертовој аксиоматици и заснивању ЕГ на њој најбоље је консултовати енциклопедијску геометријску књигу [2].

Чак и још елементарнија тврђења, од тврђења која дефинишу дужину дужи, није једноставно доказати помоћу ХА. Зато се она у настави средње школе обично претпостављају као позната и не доказују се. Таква су, на пример, тврђења:

егзистенција тачке између две дате тачке, егзистенција средишта дужи и тврђење да су прави углови међусобно подударни.

На пример, да би се доказала веома значајна теорема о егзистенцији тачке између две дате тачке, потребно је комбиновати више Хилбертових аксиома припадности и аксиома распореда, међу њима Пашову аксиому. Тек после ове теореме можемо доказати да између две дате тачке постоји бесконачно много тачака, тек се после ње може дефинисати појам дужи, појам унутрашње тачке дужи, појам вектора, појам полуправе, појам угла итд, појмова без којих геометрија не би ни постојала.

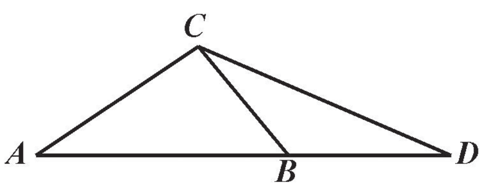
Али врло ретко се доказује у настави средње школе и тзв. неједнакост троугла: *једна страница троугла није већа од збира друге две странице.* Ово тврђење улази у основе разних математичких дисциплина, у основе механике, физике, у основе технике итд. Неједнакост троугла је једна од интуитивних особина појма *растојања.*

Ово тврђење није лако доказати на бази ХА а доказивао га је још Еуклид у својим *Елементима*, на бази својих непрецизних аксиома. То тврђење је користио Архимед кад је израчунавао површину ограничену параболом. Еуклид је за доказ овог тврђења користио следећу схему тврђења: 1) Спољашњи угао троугла је већи од било ког несуседног унутрашњег угла, 2) Наспрам веће странице лежи већи угао, 3) Наспрам већег угла лежи већа страница. Та схема доказа и данас је присутна у неким уџбеницима. Приказаћемо ту схему користећи ХА.

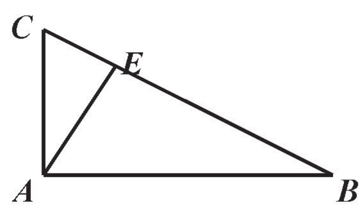
Посматрајмо $\triangle ABC$ на слици 1. Нека је $d(A,C)$ највећа дужина странице овог троугла (чим је „највећа“, већ се користе ХА конгруентности и непрекидности). Постоји тачка D на правој AB, таква да је $d(B,C) = d(B,D)$ и да је B између A и D. Тада је $\triangle DCB$ једнакокрак са основицом CD. Зато је $\angle BDC = \angle DCB$. Будући да је B између A и D, то је, у $\triangle ADC$, $\angle ACD > \angle ADC$. Ако искористимо тврђење да наспрам већег угла лежи већа страница, можемо закључити да је

$$d(A,B) + d(B,C) = d(A,B) + d(B,D) = d(A,D) > d(A,C).$$

Као што видимо, да дођемо до ове неједнакости потребно је претходно доказати два тврђења: „углови на основици равнокраког троугла су једнаки“ и „наспрам већег угла лежи већа страница“. За доказе ових тврђења користи се више Хилбертових аксиома, међу којима су аксиоме конгруентности и аксиоме непрекидности.



Слика 1

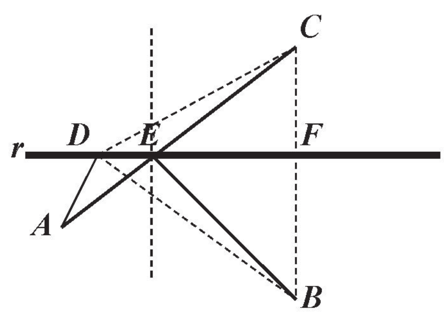


Слика 2

Међутим, ако су ученици усвојили Питагорину теорему, према којој катета није већа од хипотенузе ($c^2 = a^2 + b^2 \implies c > a \wedge c > b$), онда се доказ лако може добити пратећи слику 2. Нека је E пројекција темена A на страницу BC. Тада је $\angle BEA$ прав. Зато је $d(B,E) < d(A,B)$ и $d(E,C) < d(A,C)$, што значи да је $d(B,C) < d(A,B) + d(A,C)$.

Упркос томе што је неједнакост троугла једно од најзначајнијих тврђења у математици, у настави средње школе не истиче се довољно значај овог тврђења, и често се и не доказује. Тако да, и данас, многи ученици не знају зашто је дужина дужи најкраће растојање између крајњих тачака те дужи, зашто је дужина кружног лука већа од дужине одговарајуће тетиве итд. Потребно је у средњошколској настави овој неједнакости посветити мало више пажње и истицати њен значај у геометрији и другим математичким областима.

Неједнакост троугла се често директно користи у пракси (поготову њене последице). Наведимо један добро познати практични пример. Са једне стране реке r налазе се два села, село A и село B (слика 3). Наћи место E на обали реке где треба поставити пумпу која ће напајати водом оба села али да дужина укупних водоводних цеви буде минимална. Решење тог задатка директно користи неједнакост троугла. Одреди се тачка C, симетрична са B у односу на r. Тада је $E = AC \cap r$ тражена тачка, јер је, за било коју другу тачку D на реци, $AD + DB = AD + DC > AC = AE + EC = AE + EB$. Овај пример објашњава и закон одбијања светлости од огледала.



Слика 3

Помоћу неједнакости троугла доказује се тврђење: *једна страна триедра* (било да се ради о страни као делу равни или се ради о њеној мери, мери угла) *мања је или једнака од збира друге две стране а већа од разлике друге две стране.*

Неједнакост троугла се користи у теорији реалних бројева у облику: *за све реалне бројеве a и b важи*

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|$$

(апсолутна вредност збира два реална броја није већа од збира апсолутних вредности тих бројева). Тврђење важи за било који коначан број сабирака (а у одређеним случајевима, и за бесконачни број сабирака).

Ово тврђење се лако доказује ако се користи следећа дефиниција апсолутне вредности: $|x| = x \operatorname{sgn} x$ и њена особина $|x| \geqslant x$. Наиме, будући да је

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

непосредно добијамо

$$|a+b| = (a+b)\operatorname{sgn}(a+b) = a\operatorname{sgn}(a+b) + b\operatorname{sgn}(a+b) \leqslant |a| + |b|.$$

Неједнакост троугла важи и за модуле комлексних бројева, за интезитете вектора, за норме вектора у нормираним просторима итд.

Посебно, за реалну функцију $f(x) = |x|$ важи неједнакост

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2},$$

тј. та функција задовољава тзв. *Јенсенову дефиницију* конвексних функција која се изражава претходном неједнакости. Понекад кажемо да је у том случају функција конвексна „на доле“, јер се користи и појам конвексне функције „на горе“ (уствари, конкавне функције) дефинисане са

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}, \quad a, b \in D_f.$$

А са конвексним функцијама постоји веома много суптилних неједнакости које се користе у реалној математичкој анализи. На пример, за конвексну (на горе) функцију $f(x) = \log x$, важи

$$\log\frac{a+b}{2} \geqslant \frac{\log a + \log b}{2}, \quad a, b > 0.$$

Одавде добијамо и однос геометријске и аритметичке средине

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}, \quad a, b > 0.$$

И многе друге познате неједнакости у математичкој анализи су уопштења неједнакости троугла за реалне бројеве. Илустрације ради наведимо само једну. Код Римановог интеграла позната неједнакост

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$$

често се, са правом, зове *неједнакост троугла за Риманов интеграл*, јер се она доказује помоћу неједнакости троугла за реалне бројеве. Иначе, ако се у њој узме: $f(x) = 1$, $a, b > 0$ и ако се уместо a стави $-a$, она се своди на $|b+a| \leqslant b + a = |a| + |b|$.

Неједнакост троугла се користи при дефинисању разних појмова савремене математичке анализе као што су поменути Риманов интеграл и дужина криве линије. Затим, неједнакост троугла је омогућила да се дефинишу нове савремене области математике. Помоћу тог појама се дефинишу метрички простори и нормирани простори. Појам разних мера скупова користи неједнакост троугла. Користи га и Колмогоров за аксиоматско увођење појма вероватноће итд.

Напоменимо да се у метричком простору, осим праве неједнакости троугла $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(y, z)$, некад употребљава и тзв. *јака неједнакост троугла*

$$d(x, y) \leqslant \max\{d(x, z), d(y, z)\},$$

која са прве три аксиоме метричког простора дефинише тзв. ултраметрику и ултраметричке просторе.

Због немогућности да се ЕГ у средњим школама прикладно дедуктивно заснује на основама ХА, методичари и педагози математике у бившем Совјетском Савезу, у другој половини двадесетог века, написали су више наменских средњошколских уџбеника у којима се наводе и посебни системи примерених аксиома, које могу бити основе за дедуктивно усвајање осталог градива из ЕГ. Први такав систем аксиома потиче од А. Н. Колмогорова и његових сарадника. После њега су се појавиле геометрије (са аксиоматиком) за средње школе од разних аутора, један од њих је А. В. Погорелов (1983. године).

Заједничка идеја у свим уџбеницима које су ови методичари математичари написали јесте да се избегну Хилбертове аксиоме подударности и њихове последице (увођење појма дужине дужи и мере угла), као и Хилбертова основна релација „бити између“.

Ми ћемо овде приказати Колмогоровљеву аксиоматику (КА), а посебно истичемо његову групу аксиома – *аксиоме растојања.*

Као и код Хилберта, и ова аксиоматика се састоји из три дела: основних појмова (који се не дефинишу), основних релација између основних појмова (које се не дефинишу) и основних тврђења (аксиома) која се не доказују.

Међу основним појмовима који се користе у аксиоматици геометрије свакако се користе и појмови који се користе у целокупној математици: *појам скупа, појам реалног броја, појам пресликавања.*

Осим тога, поред основних појмова *тачка, права, раван* Хилбертове аксиоматике, овде се за основне појмове узимају и *растојање између две тачке* и *кретање као одређено пресликавање.*

Треба напоменути да појмови тачка, права, раван, у реалном свету, као неки стварни објекти, не постоје. Не постоји ни објекат који одговара геометријској дефиницији *сфере.* Али ови појмови су уобличени посматрањем реалног света, апстраховањем.

Отуда постоје сумње неких савремених физичара да реалност основа геометрије не кореспондира са реалним светом. (Познато је, рецимо, Ајнштајново мишљење о томе.) Али, то није никакв недостатак геометрије као науке, која је настала на поменутим апстрактним појмовима. Напротив, сумња је потребна, уосталом, да није било сумње у оправданост петог постулата ЕГ, не би постојале ни неуклидске геометрије. С друге стране, наука (а посебно геометрија) направила је прве праве кораке у свом развитку оног тренутка када је апстраховала и идеализовала предмете реалног света, односно, реалног окружења.

Дакле, сумње у основне поставке у науци и апстраковања у науци су нужне.

Да бисмо једноставније приказали КА, користимо следеће ознаке.

Са E означавамо скуп свих тачака реалног простора. Осим тога користимо следеће ознаке: тачке означавамо великим латиничним словима $A, B, C, \ldots$; праве означавамо малим латиничним словима $p, q, r, \ldots$; равни означавамо малим грчким словима $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Такође користимо стандардне скуповне ознаке $\in, \subset, \cup, \cap, \ldots$.

Колмогоровљева аксиоматика има 14 аксиома подељених у 5 група. Наводимо их.

I. Аксиоме припадности

I.1. *Постоји бар једна тачка, бар једна права и бар једна раван. Свака права* p *и свака раван* α *су непразни прави подскупови скупа свих тачака* E.

I.2. *За сваке две различите тачке* A *и* B *постоји једна и само једна права којој припадају ове тачке.*

I.3. *За сваке три тачке које не припадају једној правој постоји јединствена раван која их садржи.*

I.4. *Права која садржи две тачке неке равни припада тој равни.*

I.5. *Ако две равни садрже једну заједничку тачку тада оне имају једну заједничку праву.*

II. Аксиоме растојања

II.1. *За сваке две тачке* A *и* B *постоји ненегативан број* $d(A, B)$ *који називамо растојање од тачке* A *до тачке* B. *При томе је* $d(A, B) = 0$ *ако и само ако је* $A = B$.

II.2. *За било које тачке* A *и* B *важи* $d(A, B) = d(B, A)$.

II.3. *За сваке три тачке* A, B *и* C *важи* $d(A, C) \leqslant d(A, B) + d(B, C)$.

Сада је могуће дефинисати релацију „бити између“: Тачка B *лежи између тачака* A *и* C ако су те три тачке међусобно различите и ако је $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$. Остаје још да се види да ли за сваки пар тачака постоји тачка између њих.

III. Аксиоме поретка

III.1. *Свака тачка* O *праве* p *дели остали скуп тачака те праве на два непразна подскупа по следећем правилу:*

1) *тачке* A *и* B *припадају разним подскуповима ако тачка* O *лежи између их;*

2) *тачке* A *и* B *припаају једном подскупу ако једна од их лежи између тачке* O *и друге тачке.*

Тачка O заједно са било којим подскупом насталим од праве p (аксиома III.1) назива се *полуправа (зрак)* са почетком у тачки O.

III.2. *За сваки ненегативан реалан број a на одређеној полуправој са почетком у тачки O постоји јединствена тачка A таква да је $d(O, A) = a$.*

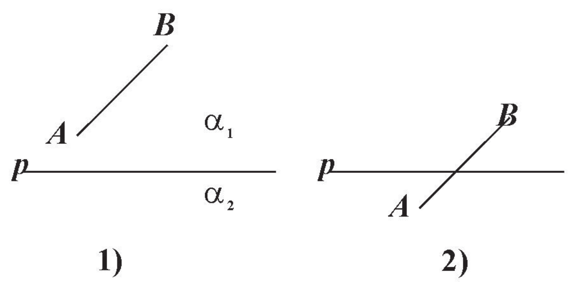
Сада можемо доказати тврђење да за сваке две тачке A и B постоји трећа тачка C, тако да је A–C–B.

III.3. *Ако једна од три дате тачке лежи између остале две тада те три тачке припадају једној правој.*

III.4. *Свака права p равни α раздваја скуп тачака који не припадају правој p на два скупа α_1 и α_2 по следећем правилу:*

1) *Ако тачке A и B ($A, B \in \alpha$) не припадају правој p ($A \notin p \wedge B \notin p$) и ако дуж $\overline{AB}$ нема заједничких тачака са p ($\overline{AB} \cap p = \varnothing$) онда обе тачке припадају истовремено једном од скупова α_1 или α_2, слика 4.1).*

2) *Ако тачке A и B не припадају правој p ($A \notin p \wedge B \notin p$) и ако дуж $\overline{AB}$ сече праву p ($\overline{AB} \cap p \neq \varnothing$), тада тачка A припада једном од скупова α_1 или α_2 а тачка другом од тих скупова, слика 4.2).*



Слика 4

После аксиома растојања можемо дефинисати кретање простора E: Непрекидно пресликавање $k\colon E \to E$ које одржава растојања између тачака, тј. за које важи

$$d(k(A), k(B)) = d(A, B),$$

за све $A, B \in E$, зове се *кретање* простора E.

IV. Аксиома кретања

Ако тачке A, B, A_1, B_1 припадају равни α и ако је $d(A, B) = d(A_1, B_1)$, тада постоје два и само два кретања k_1 и k_2 која преводе A у A_1 и B у B_1. Ако је α_1 једна полураван ограничена правом AB, тада она таквим кретањем прелази у једну од две полуравни β_1 и β_2 ограничене правом A_1B_1.

V. Аксиома паралелности

Нека тачка A и права p припадају једној равни α. Не постоји више од једне праве у датој равни које пролазе кроз тачку A и паралелне су правој p.

Очигледно је велика разлика између Колмогоровљеве аксиоматике и Хилбертове аксиоматике ЕГ. Формално гледано, разлика је и у броју основних појмова и у броју основних релација и у броју аксиома.

Основни појмови у обе аксиоматике су исти (тачка, права, раван), са разликом што код КА имамо и појам растојања који се може схватити и као једна од основних релација.

Три основне релације у ХА („бити између“, „конгруентност дужи“ и „конгруентност углова“), у КА не постоје.

Прва група аксиома (5 аксиома припадности) разликују се по садржини. Али, у обе се аксиоматизације говори о међусобним односима тачака, правих и равни. Аксиома паралелности из пете групе је иста у обе аксиоматизације. Друга, трећа и четврта група аксиома ХА не постоје у КА. Друга аксиома КА не постоји у ХА. Дакле, велика је разлика између ове две аксиоматике и у формалном и у суштинском погледу.

Највећа разлика је у томе што у КА немамо две групе аксиома ХА: 5. групу, *аксиоме подударности* и 2. групу, *аксиоме непрекидности.* Зато, да би се КА прихватила као еквивалент ХА, морају се направити копче између аксиоме растојања КА и аксиома подударности и аксиоме непрекидности ХА.

Помоћу друге групе аксиома КА, „аксиома растојања“, као што смо видели, дефинише се релација „тачка лежи између друге две тачке“, затим појам „дужи“ и појам „унутрашње тачке дужи“. После тога се дефинише изломљена линија (затворена, отворена), те повезани скупови тачака равни и појам угла. Уз помоћ „аксиоме кретања“ лако се констатује да су две дужи подударне ако су исте дужине. Иначе се, као и код Еуклида каже да су две фигуре подударне ако се кретањем могу превести једна у другу. Али, код Еуклида се „кретање“ сматрало као основни појам који се не дефинише. Овде се под кретањем скупа E подразумева пресликавање $E \to E$ које одржава растојања.

Хилбертове аксиоме непрекидности (Архимедова аксиома и Канторова аксиома које се односе на дужи) у КА се своде на одговарајуће аксиоме о реалним бројевима будући да у КА важи аксиома растојања, тј. да је свакој дужи једнозначно додељен један ненегативан реалан број.

Дакле, све аксиоме ХА могу да се репродукују помоћу КА па је КА комплетна аксиоматика еуклидске геометрије.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев, *Геометрия* I, II, «Просвещение рнавб, Москва, 1987.

[2] Н. В. Ефимов, *Висшая геометрия*, «Наука», Москва, 1978.

[3] П. М. Миличић, *Векторска аксиоматика еуклидске геометрије*, „Архимедес“, Београд, 2004.

[4] П. М. Миличић, *Десет тема из математике*, Завод за уџбенике, Београд, 2010.

[5] Г. П. Судибор, *Элементы аналитической геометрии и геометрических преобразований*, «Вышэишая школа», Минск, 1981.

[6] Э. З. Шувалова, В. И. Каплун, *Геометрия*, «Высшая школа», Москва, 1980.

Математички факултет, Београд

E-mail: `pavle.milicic@gmail.com`