Петар Свирчевић

ПРИВИДНА ХИПЕРДЕТЕРМИНИСАНОСТ ТРОУГЛА

Добро је познато да је троугао задат с тачно три међусобно независна елемента или релације над строго дефинисаним доменима. Но, неки пут се у математичкој литератури (нпр. у чланку [1]) каже за формуле:

$$(1{,}2)\qquad P=\frac{1}{2}\sqrt[3]{(abc)^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma},\quad P=\frac{1}{4}\,\frac{a^2+b^2+c^2}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma},$$

$$(3{,}4)\,P=\frac{2abc}{a+b+c}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},\quad P=\sqrt{\frac{abc(a+b+c)}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}$$

да су то формуле помоћу којих се израчунава површина троугла, али да оне немају практичне примене, јер су приказане као функције шест, уместо трију, величина. Свакако, овде треба уважити да је $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, па би требало говорити о пет величина уместо шест, јер се у задавању троугла могу дати највише две вредности мере углова. Дакле, то значи да бисмо ми могли произвољно изабрати три величине из њихових домена, а остале две уз те услове израчунати, и тек бисмо онда могли да применимо наведене фомуле. Но, да ли је то баш тако? Покушаћемо да наведени чланак мало уопштимо, па ћемо навести четири проблема, из којих ће се видети да те формуле могу имати практичну (математичку) примену, јер их можемо схватити као функције трију величина.

Проблем 1. Троугао је задат помоћу производа дужина страница и мерама двају углова, дакле помоћу: $abc=\dots$, $\alpha=\dots$, $\beta=\dots$; тада му је површина дата формулом (1).

Проблем 2. Троугао је задат помоћу збира квадрата дужина страница и мерама двају углова, дакле помоћу: $a^2+b^2+c^2=\dots$, $\alpha=\dots$, $\beta=\dots$; тада му је површина дата формулом (2).

Проблем 3. Троугао је задат помоћу количника производа и суме дужина страница и мерама двају углова, дакле помоћу: $abc(a+b+c)^{-1}=\dots$, $\alpha=\dots$, $\beta=\dots$; тада му је површина дата формулом (3).

Проблем 4. Троугао је задат помоћу: $abc(a+b+c)=\dots$, $\alpha=\dots$, $\beta=\dots$; тада му је површина дата формулом (4).

Ако мало боље погледамо, онда видимо да постоји бесконачно могућности за задавање троугла, да му нпр. (1) буде површина. Навешћемо још три примера за (1).

Проблем 5. Ако је троугао задат помоћу $ab = x$, $c = y$, $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = z$, тада му је површина дата формулом (1), јер је $P = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2y^2z}$.

Проблем 6. Ако је троугао задат помоћу $ab^2c^3 = x$, $a^3b^2c = y$, $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = z$, тада му је површина дата формулом (1), јер је $P = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\sqrt{xy}\cdot z}$.

Проблем 7. Ако је троугао задат помоћу $ab = x$, $c^2\sin\alpha = y$, $\sin\beta\sin\gamma = z$, тада му је површина дата формулом (1), јер је $P = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2yz}$.

Напоменимо да смо наведеним формулама (1,2,3,4) могли придодати и формулу

$$P = \frac{1}{4}(a+b+c)^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}, \tag{5}$$

која следи из формуле $P = s^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, где је $2s = a+b+c$, а њу изводимо у трећем разреду средње школе.

Помоћу косинусне и синусне теореме, као и формула:

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma, \quad P = \frac{1}{2}bc\sin\gamma, \quad P = \frac{1}{2}ca\sin\beta, \tag{6,7,8}$$

$$P = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}, \quad P = \frac{b^2\sin\gamma\sin\alpha}{2\sin\beta}, \quad P = \frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma}, \tag{9,10,11}$$

изводе се формуле од (1) до (5).

Сада ћемо дати још неке формуле, које су такође „функције шест величина“.

Проблем 8. Докажимо да је

$$P = \frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{2[(ab)^{-1}+(bc)^{-1}+ca^{-1}]}. \tag{12}$$

Решење. Из (6,7,8) следе једнакости $\frac{2P}{ab} = \sin\gamma$, $\frac{2P}{bc} = \sin\alpha$, $\frac{2P}{ca} = \sin\beta$. Ако те једнакости саберемо и експлицитно изразимо P, добијамо дату формулу.

Проблем 9. Ако је троугао задат помоћу елемената: $x = a+b+c$, $y = \alpha$, $z = \beta$, наћи његову површину и дужину полупречника њему описане кружнице.

Решење. Применом синусне теореме, из $a+b+c = a + a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} + a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$ добијамо да је

$$a = \frac{(a+b+c)\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma} \tag{13}$$

и, на цикличан начин,

$$b = \frac{(a+b+c)\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}, \quad c = \frac{(a+b+c)\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}. \tag{14,15}$$

Ако ово уврстимо у (6), добијамо да је

$$P = \frac{(a+b+c)^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{2(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2}. \tag{16}$$

Ако формуле од (13) до (16) уврстимо у $R = \dfrac{abc}{4P}$, онда имамо да је дужина полупречника око троугла описане кружнице дата помоћу

$$R = \frac{a+b+c}{2(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)}. \tag{17}$$

Дакле и формула (16) је привидно хипердетерминисана, јер се на први поглед чини да је то функција пет величина, а из услова задатка следи да се ради о три величине. Наиме, посматрајући проблем 9 видимо да је практично да, решавајући неки проблем о троуглу, нађемо дужине страница троугла, а онда помоћу њих можемо наћи било које величине, које су везане за тај троугао. Свакако да ова констатација неће важити ако се појављују трансцендентне релације или везе које садрже експоненте веће од четвртог степена, као нпр. $a^{\sin\alpha} + b^c - abc = 0$, $a^5 + ab^6 + c - 10 = 0, \ldots$ Напоменимо и то да троугао може бити на први поглед задат једноставним релацијама, али експлицитно изражене дужине страница могу бити гломазне, дакле непрактичне за математичку примену.

Проблем 10. Доказати да је

$$\text{а)}\quad (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma, \tag{18}$$

$$\text{б)}\quad 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma. \tag{19}$$

Упутство. (18) следи из (5) и (16), а одатле лако добијамо (19).

Проблем 11. Ако је $x = a+b+c+\dfrac{ab}{2}$, $y = c$, $z = \gamma = 90^\circ$ изразити помоћу x, y, z површину троугла P.

Решење. Видимо да се ради о правоуглом троуглу, којем је дужина хипотенузе $c = \sqrt{a^2+b^2}$. Даље, величина x је „збир“ обима и површине траженог троугла. Дакле, имамо систем једначина с непознатим a и b:

$$a + b + \frac{ab}{2} = x - y, \quad a^2 + b^2 = y^2. \tag{20,21}$$

Из (20) добијамо да је $a + b = x - y - \dfrac{ab}{2}$, а ако ту једначину квадрирамо и од ње одузмемо (21), добијамо квадратну једначину

$$\left(\frac{ab}{2}\right)^2 - (2x - 2y + 4)\frac{ab}{2} + x^2 - 2xy = 0,$$

чија су решења

$$P_{1,2} = \left(\frac{ab}{2}\right)_{1,2} = x - y + 2 \pm \sqrt{(x-y+2)^2 - x^2 + 2xy}. \tag{22}$$

Проблем 12. Ако су h_a, h_b, h_c дужине висина троугла, треба наћи дужине његових страница и дужину полупречника око њега описане кружнице.

Решење. Површина троугла дата је помоћу дужина висина формулом

$$P^{-1} = \sqrt{(h_a^{-2} + h_b^{-2} + h_c^{-2})^2 - 2(h_a^{-4} + h_b^{-4} + h_c^{-4})}, \tag{23}$$

која се лако изводи из *модификоване Херонове формуле* за површину троугла и формула

$$2P = ah_a = bh_b = ch_c. \tag{24}$$

Но, из (23) и (24) следи

$$a = \frac{2}{h_a\sqrt{(h_a^{-2}+h_b^{-2}+h_c^{-2})^2 - 2(h_a^{-4}+h_b^{-4}+h_c^{-4})}}. \tag{25}$$

Даље, цикличним помаком добијамо да је

$$b = \frac{2}{h_b\sqrt{(h_a^{-2}+h_b^{-2}+h_c^{-2})^2 - 2(h_a^{-4}+h_b^{-4}+h_c^{-4})}}, \tag{26}$$

$$c = \frac{2}{h_c\sqrt{(h_a^{-2}+h_b^{-2}+h_c^{-2})^2 - 2(h_a^{-4}+h_b^{-4}+h_c^{-4})}}, \tag{27}$$

а помоћу добијених величина лако изводимо да је

$$R = \frac{2}{h_a h_b h_c[(h_a^{-2}+h_b^{-2}+h_c^{-2})^2 - 2(h_a^{-4}+h_b^{-4}+h_c^{-4})]}. \tag{28}$$

Напоменимо да из (28) можемо закључити да важе следеће две импликације:

Импликација 1. Ако су дужине висина троугла рационални бројеви, тада је и дужина полупречника описане кружнице рационалан број.

Импликација 2. Ако су дужине висина троугла алгебарски бројеви, тада је и дужина полупречника описане кружнице алгебарски број.

Проблем 13. Докажимо да класа троуглова која је задата величином $a^2h_a^2 + 2bh_b$ има једнозначну поврину, која је дата формулом

$$P = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2h_a^2 + 2bh_b + 1} - 1\right). \tag{29}$$

Решење. Из формула $P = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b$ следи једначина

$$P^2 + P - \frac{1}{4}a^2h_a^2 - \frac{1}{2}bh_b = 0, \tag{30}$$

чије је решење, које има смисла, дато помоћу (29), дакле читава класа троуглова с тим својством има једозначно одређену површину (али добијени израз не задовољава услов димензионалности).

ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Halapa, *Površina trokuta izražena duljinama stranica i kutovima*, Matematičko-fizički list, 216, 255–256 (2003/2004), Zagreb.

[2] B. Pavković, B. Dakić, Ž. Hanjš, P. Mladinić, *Male teme iz matematike*, HMD, Zagreb 1994.

[3] P. Svirčević, *Kumulativna formula za površinu trokuta*, Matematičko-fizički list, 3 (2008/2009), Zagreb.

E-mail: petar.svircevic@zg.t-com.hr