Др Милан Живановић

НЕСТАНДАРДНИ ЗАДАЦИ О КРЕТАЊУ

Приликом указивања на могућности примене одређених математичких садржаја обично се на часовима презентују устаљени карактеристични задаци. При томе се од ученика на часовима и у домаћим задацима најчешће тражи да увежбају рутину тих презентованих примера. На тај начин се стварају стереотипне ситуације математичког учења које занемарају развој креативности, самосталности и логичког мишљења те доводе до пада мотивисаности за рад даровите деце. Због тога је потребно да се у домаћим задацима, а и у редовној настави, разним видовима индивидуализиације унесу проблемски садржаји који ће од ученика захтевати већу ангажованост у тражењу скривених веза између наученог и проблема са којим се срећу. Задатке са таквим проблемима обично зовемо нестандардним. Висок мотивациони карактер посебно поседују текстуални нестандардни задаци о кретању, због њихове повезаности са реалним проблемима и корелације са учењем физике.

Текстуални задатак треба најпре пажљиво прочитати и извршити његову анализу. Најпре се врши семантичка анализа текста која подразумева његово разумевање. Треба уочити везу између термина на основу граматичке конструкције и изабрати најзначајније информације о појмовима које они представљају. На основу тога се бира величина или величине које ћемо означити променљивим. Даље настављамо са логичком анализом која подразумева правилно изражавање величина из текста задатка одговарајућим алгебарским изразима и њихово постављање у одговарајуће релације. На тај начин добијамо једначине или неједначине или њихове системе као модел датог проблема. Тако прекомпоновани задатак решавамо математичким апаратом и на крају проверавамо која од добијених решења модела представљају решења датог проблема и да ли су тиме укључена сва решења.

Погледајмо неколико примера таквих проблема.

1. Из места A на кружном путу истовремено у истом смеру су кренули мотоциклиста и бициклиста константним брзинама. Док је бициклиста прешао пун круг мотоциклиста је прешао пуна два круга и још путању AB која му је била потребна да први пут стигне бициклисту. Колико пута је брзина мотоциклисте већа од брзине бициклисте?

Решење. Пут и брзина су директно пропорционални па однос брзина можемо одредити преко односа пређених путева. Нека је $x = AB$ дужина пута коју пређе бициклиста док га мотоциклиста стигне први пут. Тада је мотоциклиста прешао пут $x+s$, где је s укупна дужина кружног пута. Док је бициклиста прешао пут s мотоциклиста је прешао $x+2s$. Како су се кретали константним брзинама, однос пређених путева је константан па је

$$\frac{x+s}{x}=\frac{x+2s}{s}, \text{ одакле је } x^2+sx-s^2=0.$$

Позитивно решење ове једначине је $x=\dfrac{s}{2}(\sqrt{5}-1)$. Ако су v_m и v_b брзине мотоциклисте и бициклисте, тада је

$$\frac{v_m}{v_b}=\frac{x+s}{x}=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

2. Један туриста је кренуо из места A у место B у 6 сати. Други је кренуо из места B у место A у 7 сати. Срели су се у 8 сати. Први туриста је у место B стигао 28 минута касније него други у A. Колико је времена сваки од њих провео у путу?

Решење. Нека је t време које је провео други туриста у путу изражено у минутима. Тада је $t+88$ време у минутима које је први туриста провео у путу. Нека је s растојање између места A и B. Брзина првог путника у јединици дужине по минуту је $\dfrac{s}{t+88}$, а брзина другог $\dfrac{s}{t}$. Пређени путеви до сусрета су једнаки $\dfrac{s}{t+88}\cdot 120$ за првог туристу, односно $\dfrac{s}{t}\cdot 60$ за другог туристу. У тренутку сусрета они су заједно прешли целокупно растојање s па важи једнакост

$$\frac{s}{t+88}\cdot 120+\frac{s}{t}\cdot 60=s.$$

Позитивно решење ове једначине је $t=132\,\mathrm{min}$. То је време које је други туриста провео у путу. Значи да је први путовао још 88 минута, тј. 220 минута.

3. Из две луке A и B истовремено су један према другом константним брзинама кренула два брода. Први брод је стигао у B 16 часова, а други у A 25 часова после сусрета. Колико је сваки брод путовао укупно?

Решење. Нека је растојање између A и B јединично и нека су v_1 и v_2, брзине првог, односно другог брода. Пређени путеви ових бродова у једнаким временским интервалима су пропорционални њиховим брзинама. То значи да су они у тачки сусрета растојање између A и B поделили у односу $v_1 : v_2$. Односно, први је дотле прешао $\dfrac{v_1}{v_1+v_2}$, а други $\dfrac{v_2}{v_1+v_2}$ део пута. Сваком је преостало онолико колико је други прешао. Из податка о времену проведеном на другом делу пута одређујемо брзине ових бродова, па је брзина првог брода $v_1=\dfrac{1}{16}\,\dfrac{v_2}{v_1+v_2}$, а брзина другог брода $v_2=\dfrac{1}{25}\,\dfrac{v_1}{v_1+v_2}$. Дељењем ових једнакости, после краћег сређивања добија се да је $\left(\dfrac{v_1}{v_2}\right)^2=\dfrac{25}{16}$, па је $\dfrac{v_1}{v_2}=\dfrac{5}{4}$. То значи да је први до сусрета прешао $5/9$ пута, а други $4/9$ пута. Нека је t_1 време за које први брод пређе цео пут. Тада је према услову задатка $\dfrac{4}{9}:16=1:t_1$. Добија се на крају да је $t_1=36$ сати. Слично се одређује да је други брод провео у путу $t_2=45$ сати.

4. Аутомобилиста прелази пут од A до B за 1 сат. Истовремено када је аутомобилиста кренуо из A у B кренуо је и пешак из B у A. Аутомобилиста је примио пешака и довезао га у место A, а затим поново кренуо у место B у које је стигао 2 сата и 40 минута након првог поласка. Колико би времена требало пешаку да сам стигне из места B у A?

Решење. Нека је t време до сусрета изражено у сатима. Тада је $2t$ време потребно да аутомобилиста довезе пешака у A. Да стигне у место B аутомоболисти је потребно још сат. Значи да је $1+2t=2\dfrac{2}{3}$, одакле је $t=\dfrac{5}{6}$ сати. Нека су даље v_a, v_p брзине аутомобилисте и пешака, а s растојање од A до B. По услову задатка можемо поставити систем једначина

$$v_a \cdot 1 = s$$
$$v_a \cdot \frac{5}{6} + v_p \cdot \frac{5}{6} = s$$

Елиминацијом s добијамо $v_a = 5v_p$, па би пешак на том путу провео 5 пута више времена од аутомобилисте, тј. 5 сати.

5. Пут пролази кроз градове A и B. Бициклиста је кренуо из A у смеру према B. Истовремено су из града B кренула два пешака истим брзинама. Један према A, а други у супротном смеру. Бициклиста је срео првог пешака 18 минута након поласка, а другога сат времена после проласка кроз B. Одредити време кретања бициклисте од града A до града B.

Упутство. Нека је t време путовања бициклисте до сусрета са другим пешаком. Растојање од A до B нека је јединично, а са v_b и v обележимо брзине бициклисте и пешака у јединици пута по сату. Из услова да бициклиста срећe првог пешака након 18 минута добијамо једначину $\dfrac{3}{10}v_b + \dfrac{3}{10}v = 1$. До B бициклиста путује $\dfrac{1}{v_b}$ сати и још један сат до сусрета са другим пешаком. Значи, $t=\dfrac{1}{v_b}+1$. У тренутку сусрета разлике између њихових пређених путева су једнаке јединичном растојању AB. На основу тога имамо другу једначину $\left(\dfrac{1}{v_b}+1\right)(v_b-v)=1$, итд.

Сличне идеје се могу применити и у следећим задацима:

1. Дужина краћег лука између тачака A и B на кружници износи $150\,\mathrm{m}$. Ако се тачке крећу једна према другој по мањем луку, срешће се за 10 секунди, а ако се крећу једна према другој дужим луком срешће се за 14 секунди. Тачка A пређе пун круг за време за које тачка B пређе само $90\,\mathrm{m}$. Одредити брзине кретања тачака и дужину кружнице.

2. Из места A и B између којих је растојање $180\,\mathrm{km}$ у сусрет један другом кренула су два воза. Први воз је из A кренуо пола сата раније од воза из B и срели су се на половини пута. Сат после сусрета растојање између возова је било $66\,\mathrm{km}$. За које време ће први воз стићи из места A у место B.

3. Два ученика су кренула истовремено у школу заједно из исте зграде једнаким брзинама. После 3 минута један ученик се сетио да је код куће заборавио свеску, те се вратио по њу брзином која је већа од полазне за 60 m/min. Узевши свеску, вратио се према школи истом брзином и сустигао друга који ја управо улазио у школу. Ако је растојање од зграде до школе 400 метара, одредити првобитну брзину кретања ученика.

4. Два скијаша су стартовала на тркачкој стази у размаку од 6 минута. Други скијаш је стигао првог на растојању 6 km од старта. Дошавши до окретнице на 13 km вратио се у супротном правцу и срео првог на 1 km повратног пута. Наћи брзине кретања скијаша.

5. Два брода која су константним брзинама кренула у сусрет са супротних обала реке срели су се на 900 m од леве обале. Стигавши до супротних обала, оба брода су кренули према местима поласка не мењајући брзине. Поново су се срели на 300 m од десне обале. Колика је ширина реке?

ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. В. Галкин, *Нестандартные задачи по математике*, Взгляд, Челябинск, 2004.

[2] http://intelmath.narod.ru/

Висока школа струковних студија за образовање васпитача, Крушевац

E-mail: mzivanovic@vaspks.edu.rs