НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
LX, 3-4 (2015), 1–13

**Др Асланбек Х. Назиев**

# РЕАЛНИ СВЕТ, МАТЕМАТИКА, ЈЕЗИК, ЛОГИКА

## Математика и реални свет

Шта је то математика? Одговори на слична питања везана за друге науке обично говоре о чему су оне. На пример, да је зоологија наука о животињама, ботаника – наука о биљкама, итд. А о чему је математика?

> *Математика је наука о квантитативним односима и просторним формама реалног света.*
>
> (Андреј Н. Колмогоров[1])

За правилно схватање ове формулације важно је бити начисто с тим да квантитативни односи и просторне форме не постоје у природи у чистом виду. А у математици се они управо изучавају у чистом виду: бројеви, а не скупови материјалних објеката, геометријске фигуре, а не облици тела која реално постоје у природи. То се постиже захваљујући мисаоном процесу одвајања од материјалног садржаја објеката реалног света и концентрисања на квантитативне односе и просторне облике. У филозофији се такав мисаони процес назива *апстраковањем*, а оно што се добија као резултат апстраковања – *апстракцијама*, или *апстрактним објектима*. На тај начин, *математика је апстрактна наука*, тј. наука о апстрактним објектима.

> *Математика је наука о апстрактним количинама; апстрактна количина је оно што изучавамо само умом, одвајајући га у уму од материје и случајних појава.*
>
> (Касиодор, VI в.н.е.)

Апстрактни објекти се не појављују само у математици. У физици се, на пример, разматрају модели атомског језгра, у ботаници врсте растиња, у зоологији класе животиња; све су то апстрактни објекти, али ни за физику, ни за ботанику, ни за зоологију не кажемо да су апстрактне науке. Ради се о томе да се сва разматрања апстрактних објеката у тим наукама спроводе уз непрекидно упоређивање добијених резултата са стањем ствари у реалном свету. *Математика,*

---
[1] «Математика»// Большая Советская Энциклопедия

*међутим, не излази ван граница својих апстракција.* Она их разматра као полазне чињенице, не водећи рачуна о њиховом пореклу и потпуно искључујући реалност док их изучава.

*Апстракција се у математици повезује с идеализацијом*, тј. давањем апстрактним објектима таквих особина којих нема у њиховим реалним изворима. На пример, због карактеристика устројства материје, ниједан реални предмет нема тачне димензије. У математици, међутим, свака дуж има потпуно одређену дужину, сваки угао потпуно одређену угаону меру итд. Захваљујући томе је у математици могуће добити тачне резултате о њеним објектима. *Математика је егзактна наука.*

Као полазни материјал за апстракцију и идеализацију у математици се користе не само предмети реалног света, већ и раније апстраковани објекти. Тако се формирају „апстракције од апстракција“ (на пример, тополошке алгебре) у којима је, на први поглед, тешко приметити квантитативне односе и просторне форме окружујуће реалности, али које ипак воде порекло од њих.

На тај начин, мада су објекти математике апстрактни, они ипак нису чисто мисаоне конструкције, већ су повезани с реалношћу. Због тога *свако откриће у математици говори нешто ново и о реалном свету.*

> *Нема ниједне области математике, колико год апстрактна она била, која неће кад-тад наћи примену на појаве реалног света.*
>
> (Николај И. Лобачевски)

Колико год да су, рекло би се, далеки од реалности нееуклидска геометрија или функције са вредностима у Клифордовим алгебрама, и они налазе своју примену при изучавању физичких процеса. *Ширина примена математике је неограничена*, и разлог томе се крије управо у њеној апстрактности, јер што је апстрактнији неки појам, то је шири круг појава који он обухвата.

## Језик

Мада су математички објекти мисаони, а свако мисли на свој начин, математичарима ипак успева да се усагласе у вези својих апстрактних објеката. То се постиже захваљујући једном од највећих достигнућа човечанства – језику.

> *Људска цивилизација је производ језика, а језик је производ цивилизације која се развија. Слобода мисли је могућа захваљујући језику: благодарећи њему се ослобађамо потпуне зависности од тренутног расположења.*
>
> (Алфред Уајтхед)

Језик представља средство комуникације међу људима. Помоћу језика изражавамо своје мисли и саопштавамо их другима. Писани језик служи као средство чувања информација и њихових преношења, не само од човека човеку, већ и од поколења к поколењима. Захваљујући њему, човечанство нагомилава знања и и креће се напред у свом развитку.

Више од тога, *језик помаже и у добијању знања.* Вероватно бисмо и без језика некако схватили да човек има исто толико ногу колико руку. Али није могуће без језика добити тако једноставан резултат као што је једнакост

$$9\,876\,543\,210 - 123\,456\,789 = 9\,753\,086\,421.$$

Овај пример показује да нам *језик помаже да схватимо такве ствари које себи чак не можемо представити.* Немогуће је себи представити горе написани резултат; схватити га користећи језик способан је сваки ученик четвртог разреда. Исто тако, немогуће је представити себи да се светлост простире брзином од $300\,000\,\mathrm{km/s}$, док је схватање тога помоћу језика сасвим доступно.

На тај начин, *језик је оруђе мисли*, не само средство њиховог изражавања, већ и начин њиховог постојања. *Мисли се извршавају језиком.* Дешава се да нам се чини да све разумемо али не можемо да искажемо. Али увек се после покаже да смо могли да искажемо и нешто што нисмо разумели. Зато је најбољи начин да себи разјаснимо мисли – да покушамо да их преточимо у речи. *Бирајући речи, прецизирамо мисли.*

> *Мисли се мењају у зависности од речи којима су изражене. Не дају мисли значај речима већ речи мислима.*
>
> (Блез Паскал)

> *Често се ствари које су ми се чиниле истините док сам само мислио о њима испоставе лажне када их запишем на папиру.*
>
> (Рене Декарт)

## Математика и језик

Језик игра велику улогу у науци.

> *Вештина размишљања своди се на добро развијени језик … Реч треба да доведе до идеје; идеја треба да изражава дело; то су три отиска једног истог печата; и како се идеје чувају и изражавају речима, то, ако се не усавршава језик, не усавршава се ни наука, и обратно; и колико год били тачни подаци, и колико год биле исправне идеје њима генерисане, они би ипак изазивали лажне представе ако не бисмо имали тачне изразе да их пренесемо …*
>
> (Антоан Лавоазје)

Али посебно је битно важна улога језика у математици. Разлог је њена апстрактност. Математички објекти су мисаони, а мишљење се усавршава језиком, зато се *сво математичко стваралаштво усавршава језиком.* Језик помаже математичарима да се изборе са светом апстрактних објеката помоћу конкретних знакова.

Апстрактне објекте не можемо видети „очима лица“, могу се видети само „очима ума“ (Галилеј). Информацију о томе шта треба видети очима ума можемо добити само помоћу језика. Зато математичари држе најстрожу дисциплину при употреби језика, и врло су нетрпељиви према најмањим нетачностима формулација. То може изгледати као претерани педантизам, али условљен је самом природом математике.

Конструкција било које математичке теорије врши се помоћу језика. Она почиње упознавањем објеката проучавања, али не сасвим обичним упознавањем. Како су објекти узучавања апстрактни, не могу се показати. Остаје само да се искаже шта су они. Зато математичка теорија почиње описивањем објеката изучавања. На таквом описивању почивају сва даља тврђења о објектима изучавања. Теорија, пак, представља систем тврђења који изражавају судове о објектима проучавања, заснованих на тим описима.

### Истина и лаж

Слобода изражавања коју језик омогућава има и своје наличје – језик може да нас удаљи од реалности. Једнаком лакоћом можемо да кажемо да је снег бео и да је он црн, да је $2\times2=4$ и да је $2\times2=5$. Неопходно је у исказима разликовати истину и лаж.

Истина – у најширем смислу те речи – јесте сагласност са реалношћу. О томе говори и сама реч „истина“, у којој се без труда препознаје много старија реч „јестина“, која означава „то што јесте (уствари, у реалности)“. На тај начин, истина – то је оно што јесте, заиста.

$$\boxed{\textbf{ИСТИНА}} \equiv \boxed{\textbf{ЈЕСТИНА}} \equiv \boxed{\text{ То што јесте (уствари)}}$$

*Онај који говори о стварима у сагласности с тим какве оне јесу, говори истину, онај који говори о њима другачије – лаже.*

(Платон)

Сагласно претходном, исказ се сматра: *истинитим* ако он говори о таквом стању ствари које одговара реалности; *лажним* ако он говори о стању ствари које у реалности не важи.

На пример, тврђење

Волга се улива у Каспијско море

је иситинито јер се Волга заиста улива у Касписјко море. А тврђење

Волга се улива у Балтичко море

је лажно јер у реалности ствари стоје другачије.

Обратимо пажњу: истините или лажне могу бити само оне реченице које говоре о неком стању ствари. Такве реченице називамо *потврдним.* За разлику од њих, упитне реченице („Колико је сати?“), узвичне („Живеле музе!“), наредбодавне („Обриј се!“) и многе друге не саопштавају о неком стању ствари и зато не могу бити ни истините ни лажне. У даљњем, када будемо говорили о исказима, увек ћемо имати у виду потврдне реченице.

Постоје још и такозване бесмислене реченице, које су граматички конструисане као потврдне, али, за разлику од њих, не говоре ни о каквом стању ствари. Њих не треба мешати с лажним исказима. Реченица „број 3 је паралелан броју 2“ бесмислена је, јер релација паралелности за бројеве није дефинисана. Због тога она није ни истинита ни лажна. За разлику од ње, реченица „број 3 је једнак броју 2“ лажна је, али није бесмислена. Више од тога, проглашење те реченице лажном засновано је на њеној смислености – разумемо о чему се говори у тој реченици, и видимо да ствари стоје другачије.

## Истина и доказ

Да ли је исказ тачан или лажан, зависи, по правилу, не само од самог исказа, већ и од објеката о којима се у њему говори. Уколико бисмо посматрали исказ „Иван је виши од Петра“, не можемо да знамо да ли је он тачан јер то зависи још и од Ивана и Петра.

Може се догодити да је најбољи начин да се установи да ли је неки исказ тачан – да се о том уверимо на очигледан начин, слично као што се уверавамо у истинитост (или лажност) исказа „Пада снег“. Међутим, често је такав приступ нереалан. И не ради се чак ни о томе да објекти који се помињу у исказу могу бити недоступни непосредном посматрању, већ о томе што савршено очигледна тврђења могу да се покажу нетачним. „Очигледно“ је да је кашика која стоји у чаши с водом преломљена; у стварности она је цела. „Очигледно“ је да се Сунце окреће око Земље – у реалности ствари стоје другачије. Истину је потребно потврдити.

Мисаоне процедуре помоћу којих се потврђује тачност тврђења називају се *доказом* тог тврђења. Циљ доказа је да се тако повеже оно што се тврди с реалним стањем ствари, да истинитост тврђења постане очигледна. У неким случајевима је за то довољно просто посматрање, у другим је неопходан специјално постављен експеримент, а у трећим – још понешто. Свака наука располаже сопственим средствима за потврду истинитости својих резултата.

Значајно је да доказ не само да потврђује истинитост тврђења, већ и помаже у разумевању онога што се тврди. Јер, упоређујући тврђење с реалним стањем ствари, ми успостављамо везе између њих и, захваљујући томе, схватамо *зашто* дато тврђење важи. На тај начин, доказ је један од путева помоћу којих долазимо до разумевања.

Али не треба мислити да захваљујући доказима добијамо могућност да се више не ослањамо на очигледност.

*Очигледност је основни факат из којег следи све велико.*

(Алфред Уајтхед)

Не ослањајући се на очигледност, ми вадимо кашику из чаше с водом. И видимо да кашика није преломљена. Једну очигледност замењујемо другом која нам се чини вероватнијом. Доказ је средство којим ограничавамо примену очигледности у такав оквир којим је, како нам се чини, грешка искључена.

Међутим, доказ није само то. Захваљујући доказима област онога што нам се чини очигледним постепено се проширује. Доказујући попуњавамо размак између оног што тврдимо и оног што реално постоји, помоћу низа очигледних детаља, повезаних очигледним везама. Временом стичемо способност да уочавамо неке од тих корака „на први поглед“ – тада такви низови детаља и чињенице које они потврђују постају очигледни.

И разумевање доказа се у крајњој линији ослања на очигледност. Проучавајући готов доказ, у почетку посматрамо његове посебне кораке. Када нам ти кораци постану очигледни, кажемо да смо их разумели. Заим покушавамо да „уловимо“ везу између тих корака, после чега нам постану јасни читави делови доказа. Онда покушавамо да разумемо везе између тих делова итд. Најзад наступа моменат када успевамо да мисаоно обухватимо доказ као нешто цело. Тада нам доказ постаје јасан у целини и кажемо да смо га разумели.

Аналогно стоји ствар с разумевањем уопште. У почетку разумемо само оно што је непосредно очигледно. Али област непосредно очигледног је за нас ограничена. Доказ је средство којим се та област проширује. Доказ је инструмент проширења наше способности за увиђање очигледног и за разумевање.

### Истина у математици

Посматрајмо неко једноставно математичко тврђење, на пример,

$$1 + 1 = 2. \tag{1}$$

Тешко да би неко посумњао у његову истинитост, али признати га истинитим на први поглед није у сагласности с реченим више. Заиста, истинитим смо се договорили да називамо тврђења која одговарају реалности, а у реалности не постоје такве ствари као што су 1 и 2 (јер су бројеви, као и сви математички објекти, апстрактни). Следи да тврђење (1) говори о стању ствари које не постоји у реалности (јер у њој не постоје објекти о којима је реч у тврђењу) и зато би га требало прогласити лажним.

Излаз би се могао потражити тако што би се објавило: истинитост једнакости (1) означава да су истините његове „конкретне реализације“: 1 јабука + 1 јабука = 2 јабуке, итд. Проширивање таквог схватања истинитости на остала математичка тврђења значило би да се истинитост у математици показује путем експеримената с предметима света који нас окружује. То се, међутим, уопште не слаже с праксом математичког истраживања: геолог проверава исправност својих извођења на геолошкој експедицији, авиоконструктор на тренажном полигону, а математичар – за писаћим столом. Не, исправно решење овог проблема треба тражити на други начин.

Подсетимо се да је математика апстрактна наука. Њени апстрактни објекти чине апстрактну математичку реалност која и представља објекат непосредног изучавања у математици. Сва тврђења математичара односе се управо на ту апстрактну математичку реалност. Због тога се под истинитошћу у математици подразумева сагласност с управо том математичком реалношћу. Тврђење је истинито у математици ако оно описује стање ствари које постоји у математичкој реалности; оно је лажно у математици ако описује стање ствари које у тој реалности не важи.

Наравно, може нас интересовати да ли се стање ствари у математици слаже с оним које постоји у реалном свету. Међутим, пре него што одговоримо на то питање, треба га разумети, а за то је потребно наћи начин како математичко тврђење протумачити као тврђење о реалном свету. Јасно је да ће после такве интерпретације тврђење престати да буде чисто математичко, тако да ћемо, уместо да говоримо о истинитости у математици, уствари говорити о истинитости *примене математике*. Она, пак, не зависи само од математике, већ и од тога ко и како примењује математику на реални свет и како он тумачи тако добијене резултате.

Једно исто тврђење може да допушта и исправне и неисправне примене. Тако тврђења

$$1 \text{ слон} + 1 \text{ слон} = 2 \text{ слона}$$

и

$$1 \text{ слон} + 1 \text{ слон} = 2 \text{ животиње}$$

представљају исправну, односно неисправну примену једнакости (1).

### Математика и доказ

Како је већ речено, тврђење је истинито ако одговара реалности. Из тврђења самог по себи, уопште говорећи, није могуће утврдити да ли је истинито или лажно – потребно га је упоредити с реалношћу.

То упоређивање је прилично тежак посао. Чак и ако се у тврђењу говори о добро познатим објектима, могу се појавити озбиљне тешкоће – довољно је сетити се тврђења „Сунце се окреће око Земље“. Како онда стоји ствар с математиком чији су објекти апстрактни? Како упоредити тврђење о апстрактној реалности са самом том реалности?

Подсетимо се да су у математици сва наша знања о објектима које проучавамо садржана у тврђењима о тим објектима. Значи, да се убедимо у истинитост или лажност неког математичког тврђења можемо само путем упоређивања тог тврђења с оним тврђењима за које је већ обављена процедура проверавања. То упоређивање остварује се путем специјалних мисаоних процедура које називамо расуђивањем. Расуђивање којим се убеђујемо у истинитост тврђења називамо *доказом* тог тврђења. Тврђења за која су докази нађени зову се *доказаним тврђењима*, или *теоремама*.

> *Доказ теореме може се описати као путања која, полазећи од тврђења ... , јасних самих по себи, води кроз узастопне етапе до такве психолошке ситуације у којој теорема постаје очигледном.*
>
> (Рене Том)

У другим наукама, за потврду истинитости тврђења користе се посматрања, огледи, специјално постављени експерименти. У математици се користи само један метод потврде истинитости – доказ. Зато кажу: *математика – то је доказ*.

> *Сви знају у чему се састоји предмет математике и да се он састоји из доказа.*
>
> (Блез Паскал)

*Границе математике обухватају области свих доказних разматрања која се односе на било коју науку која је достигла такав степен развитка при којем њени појмови могу бити описани у апстрактној логичко-математичкој форми.*

(Ђерђ Поја)

*Од времена старих Грка, рећи „математика“ значи рећи „доказ“.*

(Никола Бурбаки)

Али доказ не само да нас уверава у истинитост тврђења, он такође показује из којих чињеница следи то што се тврди. Самим тим, докази успостављају везе међу тврђењима математичара. То, између осталог, показује да познавање доказа обезбеђује боље усвајање материјала, јер докази систематизују знања, а одавно је примећено да је ситематизовано знање дубље и корисније од несистематизованог. Докази чине повезујућу нит помоћу које математика постаје живи организам а не гомила тврђења.

Како је математика – доказ, то је сваки математички задатак, задатак доказивања. Зато, *решити математички задатак значи: а) формулисати и б) доказати неку теорему.* Решити једначину $3^x + 4^x = 5^x$ значи формулисати и доказати теорему: „$3^x + 4^x = 5^x$ ако и само ако је $x = 2$“. Решити задатак у којем се тражи да се нађе површина троугла са страницама 13, 14 и 15 cm значи формулисати и доказати теорему: „Ако су странице троугла једнаке 13, 14 и 15 cm, тада је површина троугла једнака 84 cm$^2$“. Исто тако стоје ствари с било којим другим задатком.

### Пракса као критеријум истине у математици

После свега реченог у претходном одељку о доказима, може се учинити да управо докази представљају критеријум истинитости у математици. Нагласимо да то није тачно. Као и у другим наукама, *критеријум истинитости у математици је пракса.* Само што овде под праксом не треба разумети материјалну, већ математичку реалност, тј. праксу математичких истраживања. Разјаснимо ово.

Типични математички текст има следећи образац:

Теорема. … … … … … … … … … … … … … … … … … … … …
… … … … … … … … … … … … … … … … … … … … … … …

Доказ. … … … … … … … … … … … … … … … … … … … … …
… … … … … … … … … … … … … … … … … … … … … … …

Реч „теорема“ у сличном контексту јесте скраћена формулација исказа: „Текст који следи представља теорему“; реч „доказ“ замењује исказ: „Текст који следи представља доказ претходно наведене теореме.“

Да би се оправдао први исказ, треба установити да је првонаведени текст заиста теорема (тј. треба доказати тврђење). Најбољи начин за то јесте да се наведе доказ, што се и чини након тога. На тај начин, тврђење названо „теорема“

се доказује. Али да ли се доказује други исказ, тј. оно што следи иза речи „доказ“? Да ли се доказује да текст који се наводи као доказ теореме заиста то представља? Обично не. А уствари је јасно да тај текст може и не бити тражени доказ, тако да би њему, строго говорећи, требало додати доказ тога да он стварно представља доказ. Међутим, то би мало тога променило, јер би после тога остало недоказаним да је нови доказ заиста то. И тако даље. Колико год доказа да наведемо, „доказност“ последњег доказа остала би незаснована. Коначно, немогуће је доказати да да је текст наведен као доказ, заиста доказ. Зато се обично то и не покушава да уради. Једноставно се исписује текст који се сматра доказом, и препушта се сваком који то жели да се самостално убеди у то. Теорема, заједно са својим доказом, улази у општи списак математичких резултата и почињу да је користи математичари у свом раду. Касније су могућа два случаја: или наступа моменат када се установи нетачност теореме и/или њеног доказа, или до тога не долази. У оба случаја, судбина теореме и њеног доказа биће решена у процесу примене од стране математичара у њиховом раду. Математичка делатност, на тај начин, и јесте та пракса која служи критеријумом истине у математици.

### Математика и аксиоматски метод

Размотримо сада основне принципе који се примењују при изградњи математичких теорија. Изучавајући било коју науку, важно је себи разјаснити методе које се у њој примењују. У вези с математиком, познавање тих метода има посебно дубоко значење, јер је без тога немогуће схватити саму природу математике.

Већ знамо да се у математици признаје за истинито само оно што је доказано. С те тачке гледано, идеалан би био такав метод изградње теорије при којем свако тврђење које се признаје за истинито може бити доказано. Јасно је, међутим, да је такав идеал недостижан. Доказујући било које тврђење, ми се неопходно позивамо на друга тврђења. Притом мора постојати доказ који се изводи први. Значи, бар она тврђења која се користе у првом доказу морају бити прихваћена без доказа.

Аналогно стоји ствар с терминима. Требало би да се смисао сваког термина који се користи у теорији разјасни у одређеној дефиницији. Лако је видети да је и такав захтев неостварљив. Заиста, објашњавајући смисао било ког термина, ми користимо друге термине. Притом нека дефиниција мора бити прва. Значи, бар они термини на основу којих се уводи прва дефиниција морају се прихватити без дефинисања. И појаву аксиоматског метода можемо посматрати као остварење природне жеље да се што више ограничи и јасно фиксира избор термина који се користе без дефинисања, као и избор тврђења који се користе без доказа.

При аксиоматској иградњи теорије најпре се издваја невелика група термина помоћу којих се затим описују објекти изучавања теорије. Термини који су ушли у ту групу називају се *основним*. Како се они у теорији не дефинишу, називају их још и *недефинисаним* (у датој теорији). Било који други термин се може користити у теорији тек када буде описан помоћу основних термина. Ти описи се задају посебним конструкцијама које се називају *дефиницијама* дате теорије.

Затим се приступа опису објеката теорије која се изграђује. То описивање се састоји од тврђења, формулисаних у основним терминима. У сваком од тих тврђења се наводи неко потпуно одређено својство објеката теорије. Тврђења која представљају полазне описе објеката теорије називају се *основним тврђењима*, *основним теоремама* или *аксиомама* дате теорије. Они се сматрају истинитим у датој теорији, без било каквог доказивања. Свако друго тврђење може се прихватити као истинито у датој теорији тек након што је његова истинитост установљена на основу аксиома. Само таква тврђења се називају теоремама аксиоматске теорије. На тај начин, *теорема аксиоматске теорије је тврђење чија је истинитост утврђена на основу аксиома те теорије.*

Разуме се, при практичној изградњи аксиоматске теорије, из аксиома се непосредно изводи само мањи број првих теорема, а даље се заједно с аксиомама користе већ доказане теореме. Притом се ипак добијају само таква тврђења која би се могла добити и непосредно из аксиома – за то би само било потребно заједно с коришћеном теоремом укључити у разматрање и њен доказ. Аналогна напомена би могла бити дата и у вези с дефиницијама.

Управо описани метод изградње теорије назива се *аксиоматским* или *дедуктивним* методом. Теорије изграђена по том методу зову се *аксиоматске* или *дедуктивне* теорије.

Додајмо овоме неколико напомена. Најпре, приметимо да се аксиоме *прихватају* као истините у датој теорији. Аксиоме су договорна тврђења која улазе у основе теорије. Прихватајући аксиоме, договарамо се да сматрамо да су објекти изучавања у теорији такви, и само такви, како су представљени у аксиомама. На пример, прихватајући аксиоме геометрије, саглашавамо се да су тачке, праве и равни такви, и само такви, какви се описују у аксиомама. Притом је бесмислено питати се да ли су они „стварно" такви – јер сами по себи они уопште не постоје. У еуклидској геометрији они имају једна својства, у геометрији Лобачевског друга, а сами по себи – никаква.

Сада је јасно зашто се аксиоме сматрају *истинитим* у датој теорији. Просто зато што оне, како је речено, представљају полазне описе објеката теорије. Прихватајући аксиоме, прихватамо објекте управо онаквим како су они описани у аксиомама. Самим тим, аксиоме су у потпуности у сагласне с оном реалношћу коју оне представљају, тј. истините су кад се примене на објекте које описују.

Нагласимо на крају да се аксиоме неке теорије сматрају истинитим управо *у датој теорији.* У другим теоријама су друге аксиоме, па и друга својства објеката који се изучавају. Зато аксиоме које су истините у једној теорији уопште не морају бити истините у другим теоријама (или саме за себе). Тврђење „Кроз тачку која не припада датој правој пролази тачно једна права паралелна датој" – истинито је у еуклидској геометрији и лажно у геометрији Лобачевског. Само за себе, оно се ни на шта не односи и зато није ни истинито ни лажно.

У том смислу је аксиоматска теорија слична игри. Свака игра је потпуно одређена својим правилима. Промените правила, и играћете другу игру у којој правила прве игре више не важе или су чак бесмислена. На пример, правило „Краљу је дозвољено да изврши рокаду једанпут у току партије" важи у савременој шаховској игри, али не важи у њеној првобитној варијанти, а бесмислено је у играма са картама.

Као и у асиоматским теоријама, основним терминима у описаним играма не дају се никакве дефиниције. Шта је шаховски коњ? Може се помслити да је то фигура која има облик главе коња. Али, ако изгубимо ту фигуру, можемо место ње да ставимо на таблу кутију шибица и тада кутија шибица постаје шаховски коњ. То нам показује да је, за схватање тога шта је шаховски коњ, потпуно неважно од чега је он направљен и какву форму има; важно је само како он учествује у шаховској игри. Шаховски коњ је једна улога у шаховској игри и да бисмо одговорили на горе постављено питање треба описати ту улогу. Да бисмо је описали, морамо најпре поменути шаховску таблу и поља на њој, друге фигуре, њихова кретања итд. На тај начин, одговор на питање шта је шаховски коњ, исто као и на друга слична питања, представља потпуни опис шаховске игре.

Ако сада упоредимо шаховску игру с геометријом, приметићемо да у овој последњој ствари стоје слично. Основним терминима геометрије не дају се никакве дефиниције. 'Тачка', 'права', 'раван', 'растојање' – то су називи улога у „геометријској игри“. Одговор на питање шта су тачка, права, раван, растојање, представља потпуни опис те „игре“, тј. систем аксиома геометрије. Потпуно исто тако стоје ствари и у другим аксиоматским теоријама.

На тај начин, истинитост у аксиоматским теоријама је релативна и условна. Она је релативна зато што је свако тврђење у аксиоматској теорији истинито само примењено на ону класу објеката који се проучавају у датој теорији. И она је условна јер својства те класе објеката зависе од прихваћених аксиома. Теореме су истините ако су истините аксиоме. Као резултат, сва тврђења у аксиоматској теорији су истинита само онда ако су истините аксиоме. Све те „истине“ имају условни карактер – ако су тачне аксиоме, тачне су и теореме. И те истине се установљују помоћу доказа. Строго говорећи, само ти докази су математичка достигнућа. Тако поново долазимо до онога о чему смо говорили више:

Математика – то је доказ.

Само, овај пут имамо у виду доказе у аксиоматским теоријама. Постоји, међутим, основа да се тврди да аксиоматски метод и представља битну специфичну црту математике. Наведимо неколико исказа који потврђују ово тврђење.

> *Мислим да све што може бити објекат научног истраживања, чим сазри до формирања научне теорије, постаје достојним аксиоматског метода и, његовим посредством, математике.*
>
> (Давид Хилберт)

> *Дедуктивни метод је јединствена суштинска црта која разликује математику од свих других наука; не само да је свака математичка дисциплина дедуктивна теорија, већ и обратно, свака дедуктивна теорија је матемаичка дисциплина.*
>
> (Алфред Тарски)

*Видимо да је предмет математике одређен само [дедуктивним] методом и да се свака дедуктивна теорија може сматрати математиком.*

(Хуго Штајнхауз)

### Аксиоматски метод и примене математике

На самом почетку овог чланка је речено да је математика наука о квантитативним односима и просторним формама реалног света. Сада, пак, тврдимо да је математичка истина условна и да су основно достигнуће математике докази тих условних истина. Међутим, то никако не противречи нашем првом исказу. Једноставно, не треба мешати математику и њене примене.

*Математика и њене примене су два предмета које је погодно изучавати одвојено.*

(Ван Хао)

Да ли математичке аксиоме и теореме одговарају ономе што важи у реалном свету – то је потпуно оправдано и веома важно питање, али то питање се не односи на саму математику већ на њене примене. Да би се одговорило на то питање, потребно је, како је већ речено више, математичке аксиоме и теореме применити на реални свет, тј. указати којим објектима и односима реалног света одговарају (у датој примени) термини коришћени у датој теорији. Притом је неопходно разумети да, чим је таква кореспонденција успостављена, тврђења те теорије престају да буду део математике, већ постају тврђења о реалном свету, и одговор на питање о њиховој истинитости захтева, не више математичке, већ неке друге, пре свега експерименталне методе. И какав год одговор да се добије, он ће се односити не на поставке теорије, већ на њихово тумачење. То, дакле, неће бити истинитост резултата теорије, већ истинитост њених примена.

Снага аксиоматског метода састоји се у томе што нас он ослобађа неопходности да питање о истиности примене решавамо за свако тврђење теорије понаособ. Како су теореме теорије свакако истините ако су истините аксиоме, довољно је решити питање истинитости аксиома. И ако нешто – небитно је да ли конкретно или апстрактно, из области математике или друге области знања – задовољава аксиоме теорије, то онда задовољава и све њене теореме. Зато, сваки пут кад су аксиоме испуњене, можемо применити било који резултат теорије. Није неопходно поново проводити читав посао изградње теорије за сваку примену посебно – једна теорија обухвата све случајеве њених могућих примена.

### Аксиоматски метод и математичка делатност

Ништа се не добија на поклон, па се и за успех аксиоматског метода мора платити. Срећом, цена је невелика и потпуно разумна. Ако желимо да теореме теорије важе сваки пут када су испуњене њене аксиоме, не смемо у доказима теорема да користимо никаква својства објеката које проучавамо, сем оних који следе из аксиома. Треба да једном заувек себи кажемо: објекти теорије коју проучавамо су они и само они који задовољавају њене аксиоме, ни мање ни више.

Ако је потребно искористити било које својство објеката које проучавамо, потребно је доказати га на основу аксиома или тврђења која су на основу њих раније доказана. Појави ли се потреба за новим термином, он мора бити дефинисан на основу основних термина или оних који су били раније дефинисани на основу њих. Ако није потребно да се нешто доказује или дефинише, одложићемо то до бољих времена, а засад ћемо користити оно што је већ доказано и дефинисано. Никаква позивања на „очигледност“ или „интуитивну јасност“ не треба узимати у обзир.

Важно је разумети да сва ова ограничења не само да не доводе до осиромашења математике, већ је, напротив, обогаћују. На пример, управо избегавање било каквог позивања на интуицију у математичким конструкцијама представља извор обогаћивања интуиције. Ради се о томе да, ако бисмо се при изградњи теорије ослањали на неке фиксиране интуитивне представе, тада би резултати теорије били применљиви само у оним случајевима који одговарају тим представама. Избацивши из изградње теорије сва позивања на интуицију, добијамо могућност да резултате применимо у било којој ситуацији у којој су испуњене аксиоме, без обзира с којим интуитивним представама повезивали те примене. И често управо нове могућности примене указују на нове интерпретације теорије, дајући на тај начин могућност да се ти резултати повежу с новим интуитивним сликама.

Искључивање било каквих позивања на интуицију из математичких конструкција не значи да за бављење математиком интуиција није нужна. Они који тако мисле, мешају математику са бављењем математиком. Акисоме и дефиниције, теореме и докази – то су резултати математике. А ти резултати не падају с неба, они се добијају радом живих људи. Тај рад се не може замислити без емоција, маште, интуиције и свих осталих богатстава човекове личности. Све се то занемарује у самој математици, али је неопходно за бављење математиком. Сликовито говорећи, за бављење математиком су потребни вруће срце и хладна глава. Вруће срце – то је дубина инутуиције, смелост маште, очигледност представа, жарке емоције – све то у процесу покушаја решавања задатка. Хладна глава – то је вештина да се, нашавши решење, трезвено оцени своја машта, уклоне емоције и сви утицаји са стране и изведе доказ ослањајући се само на оно што је већ дефинисано и доказано. Некога може привући бављењу математиком једна од тих страна, неког друга. Али обе су неопходне за математичку делатност, без било које од њих она остаје сиромашна.

Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина

*E–mail*: a.naziev@rsu.edu.rs