Петар Свирчевић

АЛГЕБАРСКЕ ВРЕДНОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА

Подсетимо се најпре да се за реалан (или комплексан) број x_0 каже да је *алгебарски* ако постоји полином $P(x)$ са целобројним коефицијентима за који је $P(x_0) = 0$. Ако такав полином не постоји, број x_0 је *трансцендентан*.

У овом чланку ћемо показати да су вредности тригонометријских функција било ког угла чија се мера изражава рационалним бројем степени (нпр. $\cos 1^\circ$, $\sin 23^\circ 41' 36''$, ...) алгебарски бројеви. Затим ћемо приказати један начин израчунавања вредности $\cos 1^\circ$ с тачношћу на пет децимала.

Пођимо, користећи Моавров образац, од следећег приказа једног специјалног комплексног броја:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \cos 45^\circ + i \sin 45^\circ = \left(\cos \frac{1}{n} 1^\circ + i \sin \frac{1}{n} 1^\circ\right)^{45n} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^p,$$

где је $\varphi = \frac{1}{n} 1^\circ$, док $n \in \mathbf{N}$, а са њим и $p = 45n$, може бити облика $4k$, $4k+1$, $4k+2$ или $4k+3$. За $p = 4k$ се, применом биномног обрасца, добија

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \binom{4k}{0}\cos^{4k}\varphi + i\binom{4k}{1}\cos^{4k-1}\varphi\sin\varphi - \binom{4k}{2}\cos^{4k-2}\sin^2\varphi$$
$$-i\binom{4k}{3}\cos^{4k-3}\varphi\sin^3\varphi + \binom{4k}{4}\cos^{4k-4}\varphi\sin^4\varphi + i\binom{4k}{5}\cos^{4k-5}\varphi\sin^5\varphi - \cdots,$$

а из ове једнакости, ако применимо правило о једнакости комплексних бројева, добијамо да је

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \binom{4k}{0}\cos^{4k}\varphi - \binom{4k}{2}\cos^{4k-2}\varphi\sin^2\varphi + \cdots + \binom{4k}{4k}\sin^{4k}\varphi$$
$$= \binom{4k}{1}\cos^{4k-1}\varphi\sin\varphi - \binom{4k}{3}\cos^{4k-3}\varphi\sin^3\varphi + \cdots - \binom{4k}{4k-1}\cos\varphi\sin^{4k-1}\varphi.$$

Ако последњу једнакост поделимо са $\cos^{4k}\varphi$, добијамо алгебарску једначину

$$(1)\quad \binom{4k}{0} - \binom{4k}{2}x^2 + \cdots + \binom{4k}{4k}x^{4k} = \binom{4k}{1}x - \binom{4k}{3}x^3 + \cdots + \binom{4k}{4k-1}x^{4k-1},$$

где је

$$(2)\qquad x = \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\frac{1}{n}1^\circ.$$

Наравно, решења једначине (1) су алгебарски бројеви. Лако закључујуемо да бисмо алгебарске вредности добили и за остале вредности параметра $p = 45n \in \{4k+1, 4k+2, 4k+3\}$, а то значи да су (2) алгебарски бројеви за свако природно n. Ако искористимо познате формуле

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}},$$

констатујемо да су вредности свих основних тригонометријских функција угла $\varphi = \dfrac{1}{n}\,1^\circ$ алгебарски бројеви.

Сада лако проширујемо ово тврђење о алгебраским вредностима на све углове чија је мера било који рационалан број степени. Наиме, ако приметимо да је $\operatorname{tg}\dfrac{2}{n}\,1^\circ = \operatorname{tg}2\varphi = \dfrac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi}$, добијамо да је и овај број алгебарски. Математичком индукцијом даље закључујуемо да су бројеви

$$\operatorname{tg} m\varphi = \operatorname{tg}\frac{m}{n}\,1^\circ. \tag{3}$$

алгебарски, јер је $\operatorname{tg} m\varphi = \operatorname{tg}((m-1)\varphi+\varphi) = \dfrac{\operatorname{tg}(m-1)\varphi + \operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}(m-1)\varphi\operatorname{tg}\varphi}$. Тако, на основу (3) коначно закључујуемо да су *вредности тригонометријских функција угла од рационалног броја степени алгебарски бројеви.* Свакако, ту су укључене и вредности котангенса.

Шта је у случају да је мера угла изражена у степенима, минутима и секундама, нпр. $\varphi = 19^\circ 6' 46''$? Јасно је да се таква мера може записати у облику $\varphi = \left(19 + \dfrac{6}{60} + \dfrac{46}{3600}\right) 1^\circ = \dfrac{68\,806}{3600}\,1^\circ$, па опет добијамо угао од рационалног броја степени. Слично важи ако је број секунди записан у (коначном или периодично бесконачном) децималном облику, нпр. $\varphi = 13^\circ 38' 44{,}239''$.

Напомена 1. Може се поставити питање да ли су вредности тригонометријских функција од $\dfrac{m}{n}\,1^\circ$ $\left(0 < \dfrac{m}{n} < 90;\ \dfrac{m}{n} \in \mathbf{Q}\right)$ рационалне или ирационалне. Показује се да су све оне ирационалне, осим $\sin 30^\circ$, $\cos 60^\circ$, $\operatorname{tg} 45^\circ$. У два специјална случаја ћемо то и доказати у наставку овог чланка.

Напомена 2. Ако је мера угла изражена ирационалним бројем степени, нпр. $\varphi = (\sqrt{2})^\circ$, претходно извођење се не може спровести. Може се доказати (доказ није једноставан) да су вредности тригонометријских функција таквог угла увек трансендентни бројеви.

За (приближно) израчунавање вредности тригонометријских функција конкретних углова (и формирање одговарајућих таблица) најчешће се користе Маклоренови редови тих функција. На пример,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Међутим, примена наведеног реда не може се сматрати елементарним методом. Сем тога, одговарајући рачун у конкретним случајевима може бити прилично гломазан. На пример, да би се израчунао $\cos 1^\circ$ помоћу наведене формуле требало би у њој заменити $x = 1^\circ = \pi/180\,\mathrm{rad} \approx 0.017453\ldots\mathrm{rad}$. Навешћемо овде један другачији начин за приближно израчунавање поменуте вредности косинуса.

Пођимо од познате једнакости $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$ из које добијамо да је

$$\begin{aligned}\cos 1^\circ &= \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos 2^\circ)} = \sqrt{\frac{1}{2}\Big(1+\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos 4^\circ)}\Big)}\\ &= \sqrt{\frac{1}{2}\Big(1+\sqrt{\frac{1}{2}\Big(1+\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos 8^\circ)}\Big)}\Big)}.\end{aligned}\tag{4}$$

С друге стране је

$$\cos 8^\circ = \cos(20^\circ - 12^\circ) = \cos 20^\circ \cos 12^\circ + \sqrt{(1-\cos^2 20^\circ)(1-\cos 12^\circ)}.\tag{5}$$

Према томе, проблем ће бити решен ако израчунамо $\cos 20^\circ$ и $\cos 12^\circ$, па то заменимо у (5), и онда применимо (4).

Нађимо $\cos 20^\circ$ – на основу првог дела чланка знамо да то мора бити алгебарски број, тј. постоји алгебарска једначина с целобројним коефицијентима коју он задовољава. Из адиционих формула за косинус збира лако се добије да је $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, специјално

$$8\cos^3 20^\circ - 6\cos 20^\circ - 1 = 0.$$

Значи, $\cos 20^\circ$ је једно од решења једначине

$$8x^3 - 6x - 1 = 0.\tag{6}$$

Како је $60^\circ > 20^\circ > 0$, то је $0.5 < \cos 20^\circ < 1$. Докажимо да у интервалу $(0.5, 1)$ једначина (6) има само једно решење (једнако управо $\cos 20^\circ$).

[Из претходног се лако изводи ирационалност броја $\cos 20^\circ$. Наиме, на основу познате особине полинома за целобројним коефицијентима, евентуално позитивно рационално решење једначине (6) морало би припадати скупу $\left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}\right\}$. Како ниједан од тих бројева није вредност за $\cos 20^\circ$, закључујемо да $\cos 20^\circ$ није рационалан број.]

Посматрајмо функцију

$$f(x) = 8x^3 - 6x - 1.\tag{7}$$

Како је њен извод $f'(x) = 24x^2 - 6$ једнак нули за $x = \mp 0.5$, она има локални максимум за $x = -0.5$, а локални минимум за $x = 0.5$ (јер је $f''(-0.5) < 0$ и $f''(0.5) > 0$). При томе је $f(-0.5) = 1 > 0$ и $f(0.5) = -3 < 0$. То значи да график функције $y = f(x)$ сече x-осу у трима тачкама, тј. једначина (6) има три реална решења, с тим да је највеће из интервала $(0.5, 1)$, а то је баш $\cos 20^\circ$. Како одредити ту вредност?

Како је $f(0.5) < 0$ и $f(1) > 0$, испитаћемо предзнак вредности $f(x)$ за $x = 0.6,\ 0.7,\ 0.8,\ 0.9$, што можемо учинити помоћу обичног калкулатора. Напишимо функцију (7) у облику

$$f(x) = (8x^2 - 6)x - 1,\tag{8}$$

и делимично применимо Хорнерову шему, јер нас занима само знак вредности функције. Лако добијамо да је $f(0.6)$, $f(0.7)$, $f(0.8)$, $f(0.9) < 0$ и $f(1) > 0$; а то значи да је нула функције $f(x)$ (тј. решење једначине (6)) између 0.9 и 1. Даље следи $f(0.91)$, $f(0.92)$, $f(0.93) < 0$ и $f(0.94) > 0$; дакле, $0.93 < \cos 20^\circ < 0.94$. Тај поступак настављамо помоћу представљања (8) и калкулатора, па добијамо $f(0.931), \ldots, f(0.939) < 0$ и $f(0.940) > 0$; затим $f(0.9391), \ldots, f(0.9396) < 0$ и $f(0.9397) > 0$ и најзад $f(0.93961), \ldots, f(0.93969) < 0$ и $f(0.93970) > 0$. На тај начин видимо да је

$$\cos 20^\circ = 0.93969\cdots \approx 0.93969. \tag{9}$$

(Јасно је да смо овај поступак могли убрзати применом неког од метода нумеричке анализе, али желимо да извођење буде у што већој мери елементарно).

Нађимо сада $\cos 12^\circ$. Као и у првом случају, из адиционих формула, или коришћењем комплексних бројева, налазимо да је сада

$$\cos 5\alpha = 16\cos^5 - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha,$$

а ако ту уврстимо $\alpha = 12^\circ$, добијамо везу

$$32\cos^5 12^\circ - 40\cos^3 12^\circ + 10\cos 12^\circ - 1 = 0.$$

Дакле, $x_0 = \cos 12^\circ$ је једно решење једначине

$$32x^5 - 40x^3 + 10x - 1 = 0. \tag{10}$$

која се може написати и у облику

$$(2x-1)(16x^4 + 8x^3 - 16x^2 - 8x + 1) = 0. \tag{11}$$

Једначина (10) има или једно реално решење (једнако 1/2) или три или свих пет реалних решења. [Као и за $\cos 20^\circ$, из (11) следи да $\cos 12^\circ$ није рационалан број.]

Посматрајмо функцију

$$g(x) = 32x^5 - 40x^3 + 10x - 1.$$

Њен извод је $g'(x) = 160x^4 - 120x^2 + 10$, па она има екстремне вредности за оне x за које је $16x^4 - 12x^2 + 1 = 0$, а то су

$$x_{1,2,3,4} = \mp\sqrt{\frac{3 \mp \sqrt{5}}{8}},$$

где је $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Лако се показује да је $g''(x_4) > 0$, а то значи да функција $g(x)$ у тачки x_4 има минимум, и може се показати да је $g(x_4) < 0$, што значи да постоји тачно један корен једначине (10) који је већи од x_4. Покажимо да је тај корен управо $x_0 = \cos 12^\circ$. Заиста, како је $\cos 15^\circ < \cos 12^\circ$, а $\cos 15^\circ = \sqrt{\dfrac{1+\cos 30^\circ}{2}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$, лако се проверава да је

$$x_4 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} < \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \cos 15^\circ < \cos 12^\circ.$$

Дакле, највеће решење једначине (10) је баш $x_0 = \cos 12^\circ$. Из $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} < \cos 12^\circ < 1$ се добија да је

$$0.80902\cdots < \cos 12^\circ < 1.$$

Функцију $g(x)$ можемо писати у облику

$$g(x) = ((32x^2 - 40)x^2 + 10) - 1.$$

Сада, примењујући сличан поступак као за $\cos 20^\circ$, добијамо да је

$$\cos 12^\circ \approx 0.97814. \tag{12}$$

Најзад, из (4), (5), (9) и (12) налазимо да је

$$\cos 1^\circ \approx 0.99985.$$

Напоменимо да у овом израчунавању нисмо водили рачуна о могућој нумеричкој грешци приликом примене једнакости (4) и (5) – требало је уствари одредити $\cos 12^\circ$ и $\cos 20^\circ$ са више од 5 тачних децимала. Прецизнији рачун, међутим, даје исти резултат.

Напоменимо на крају да, у случају да знамо да неки број x_0 задовољава одређену алгебарску једначину $P(x) = 0$, то још не значи да тај број умемо експлицитно да изразимо помоћу коначно много основних рачунских операција и кореновања. Наиме, као што знамо из Абелове теореме (в. нпр. [1]), не постоји општи облик решења произвољне алгебарске једначине (степена већег од 4). У случају бројева наведених у овом раду (дакле $\cos 20^\circ$ и $\cos 12^\circ$) то би ипак било могуће (први задовољава једначину (6) која је трећег степена, а други, на основу (11), једначину четвртог степена). Међутим, практично се таква решења не могу користити због своје гломазности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] З. Каделбург, *Абелова теорема о алгебарским једначинама вишег реда*, Настава математике **53**, 1–2 (2008), 13–22.

[2] D. Mitrinović, *Zbornik matematičkih problema I, II, III*, Naučna knjiga, Beograd.

[3] P. Svirčević, *Vrijednost i netrascendentnost kosinusa od* 1° *na elementaran način*, Matematičko-fizički list, br. 4, Zagreb, 2002/03.

E-mail: petar.svircevic@zg.t-com.hr