Драгољуб Милошевић, Алија Муминагић

ЈЕДНА АЛГЕБАРСКА НЕЈЕДНАКОСТ

Нека су a, b, c, k позитивни реални бројеви и $k \geqslant 1$. Тада важи неједнакост

$$\frac{a}{ka+b+c}+\frac{b}{a+kb+c}+\frac{c}{a+b+kc} \leqslant \frac{3}{k+2}.$$

Доказ 1. Уочавамо да је

$$\frac{a}{ka+b+c}=\frac{a}{(k-1)a+(a+b+c)}=\frac{1}{k-1+\dfrac{a+b+c}{a}}.$$

Ако леву страну неједнакости коју доказујемо означимо са S, имамо

$$S=\frac{1}{k-1+\dfrac{a+b+c}{a}}+\frac{1}{k-1+\dfrac{a+b+c}{b}}+\frac{1}{k-1+\dfrac{a+b+c}{c}}.$$

Сада уводимо смене $\dfrac{a+b+c}{a}=\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{a+b+c}{b}=\dfrac{1}{y}$, $\dfrac{a+b+c}{c}=\dfrac{1}{z}$, где је $x+y+z=1$, па добијамо

$$\begin{aligned} (1) \qquad S &= \frac{x}{(k-1)x+1}+\frac{y}{(k-1)y+1}+\frac{z}{(k-1)z+1} \\ &= \frac{1}{k-1}\left(3-\left(\frac{1}{(k-1)x+1}+\frac{1}{(k-1)y+1}+\frac{1}{(k-1)z+1}\right)\right). \end{aligned}$$

На основу неједнакости између аритметичке и хармонијске средине за три позитивна броја имамо

$$\begin{aligned} (2) \qquad \frac{1}{(k-1)x+1}+\frac{1}{(k-1)y+1}+\frac{1}{(k-1)z+1} &\geqslant \frac{9}{(k-1)(x+y+z)+3} \\ &= \frac{9}{k-1+3}=\frac{9}{k+2}. \end{aligned}$$

Из релација (1) и (2) следи $S \leqslant \dfrac{1}{k-1}\left(3-\dfrac{9}{k+2}\right)=\dfrac{3}{k+2}$ за $k>1$. Лако је проверити да дата неједнакост важи и за $k=1$.

Доказ 2. На основу неједнакости између аритметичке и хармонијске средине за два позитивна броја је $\dfrac{1}{\frac{k}{2}a+b}+\dfrac{1}{\frac{k}{2}+c}\geqslant\dfrac{4}{ka+b+c}$, односно

$$\frac{1}{ka+b+c}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ka+2b}+\frac{1}{ka+2c}\right),$$

тј.

$$\frac{a}{ka+b+c}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{a}{ka+2b}+\frac{a}{ka+2c}\right).$$

На сличан начин добијамо

$$\frac{b}{a+kb+c}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{b}{kb+2c}+\frac{b}{kb+2a}\right)\quad \text{и} \quad \frac{c}{a+b+kc}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{c}{kc+2a}+\frac{c}{kc+2b}\right).$$

Сабирањем последње три неједнакости имамо

(3)

$$S\leqslant\frac{1}{2}\left(\left(\frac{a}{ka+2b}+\frac{b}{kb+2a}\right)+\left(\frac{b}{kb+2c}+\frac{c}{kc+2b}\right)+\left(\frac{c}{kc+2a}+\frac{a}{ka+2c}\right)\right).$$

С обзиром да је

$$\frac{ak}{ka+2b}+\frac{bk}{kb+2a}=\frac{k^2ab+2k(a^2+b^2)+k^2ab}{k^2ab+2k(a^2+b^2)+4ab}=1+\frac{(k^2-4)ab}{k^2ab+2k(a^2+b^2)+4ab},$$

због $a^2+b^2\geqslant 2ab$ следи

$$\frac{ak}{ka+2b}+\frac{bk}{kb+2a}\leqslant 1+\frac{k^2-4}{k^2+4k+4}=\frac{2k}{k+2},$$

тј.

$$\frac{a}{ka+2b}+\frac{b}{kb+2a}\leqslant\frac{2}{k+2}.$$

Аналогно добијамо

$$\frac{a}{ka+2c}+\frac{c}{kc+2a}\leqslant\frac{2}{k+2}\quad \text{и} \quad \frac{b}{kb+2c}+\frac{c}{kc+2b}\leqslant\frac{2}{k+2}.$$

Коначно, сабирањем последње три неједнакости, због (3), имамо

$$\frac{a}{ka+2b}+\frac{b}{kb+2a}+\frac{a}{ka+2c}+\frac{c}{kc+2a}+\frac{b}{kb+2c}+\frac{c}{kc+2b}\leqslant\frac{6}{k+2},$$

тј. $S\leqslant\dfrac{1}{2}\dfrac{6}{k+2}=\dfrac{3}{k+2}$.

Доказ 3. Уводимо смену $ka+b+c=x$, $a+kb+c=y$ и $a+b+kc=z$. Одавде добијамо

$$a=\frac{1}{k^2+k-2}((k+1)x-y-z),\quad b=\frac{1}{k^2+k-2}(-x+(k+1)y+z),$$
$$c=\frac{1}{k^2+k-2}(-x-y+(k+1)z).$$

Сада је

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{k^2+k-2}\left(\frac{(k+1)x-y-z}{x}+\frac{-x+(k+1)y-z}{y}+\frac{-x-y+(k+1)z}{z}\right)\\ &= \frac{1}{(k-1)(k+2)}\left(3(k+1)-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\right)\\ &\leqslant \frac{1}{(k-1)(k+2)}(3k+3-2-2-2),\quad \text{тј.}\quad S\leqslant\frac{3}{k+2}\ \text{за}\ k>1.\end{aligned}$$

Доказ 4. Будући да је

$$\frac{a}{ka+b+c}=\frac{1}{k}\cdot\frac{ka+b+c-(b+c)}{ka+b+c}=\frac{1}{k}\left(1-\frac{b+c}{ka+b+c}\right),$$

имамо да је

$$S=\frac{1}{k}\left(3-\left(\frac{b+c}{ka+b+c}+\frac{c+a}{a+kb+c}+\frac{a+b}{a+b+kc}\right)\right). \tag{4}$$

Применом неједнакости

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

за позитивне бројеве $a,,b,c,x,y,z$ (в. *Тангента*, број 55/3 (2008/09), стр. 8–10) добијамо

$$\begin{aligned}&\frac{b+c}{ka+b+c}+\frac{c+a}{a+kb+c}+\frac{a+b}{a+b+kc}\\ &\qquad=\frac{(b+c)^2}{(ka+b+c)(b+c)}+\frac{(c+a)^2}{(a+kb+c)(c+a)}+\frac{(a+b)^2}{(a+b+kc)(a+b)}\\ &\qquad\geqslant\frac{(2(a+b+c))^2}{2(a^2+b^2+c^2)+(2k+2)(ab+bc+ca)}\\ &\qquad=\frac{2(a+b+c)^2}{(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)+(k-1)(ab+bc+ca)}.\end{aligned}$$

Отуда, због $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$ и $ab+bc+ca\leqslant\frac{1}{3}(a+b+c)^2$, следи

$$\frac{b+c}{ka+b+c}+\frac{c+a}{a+kb+c}+\frac{a+b}{a+b+kc}\geqslant\frac{2}{1+\frac{k-1}{3}}=\frac{6}{k+2}. \tag{5}$$

Из неједнакости (4) и (5) следи да је $S\leqslant\frac{1}{k}\left(3-\frac{6}{k+2}\right)=\frac{3}{k+2}$.

17. НОУ дивизије 43, Горњи Милановац
Enighedsvej 58, 1. th., 4800 Nykobing F., Denmark
E-mail: dramil947@gmail.com