**Марко Кошчица**

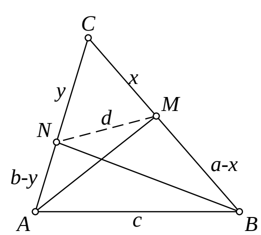
## ЈЕДНО УОПШТЕЊЕ ШТАЈНЕР-ЛЕМУСОВЕ ТЕОРЕМЕ

У овом чланку навешћемо једно уопштење Штајнер-Лемусове[1] теореме за еуклидски простор и још четири последице тог тврђења.

Теорема. *У троуглу $ABC$ еуклидске равни, $M$ и $N$ су унутрашње тачке редом дужи $BC$ и $CA$ и притом важи*

$$\max\{|MC - NC|, |MB - NA|\} \leqslant |BC - CA|.$$

*Тада је $AM = BN$ ако и само ако је $BC = CA$.*




Слика 1

*Доказ.* ($\Longrightarrow$): Ако је $BC = CA$, онда је по услову теореме $0 \leqslant |MC - NC| \leqslant 0$, па следи да је $MC = NC$. Троуглови $AMC$ и $BNC$ подударни су на основу става СУС, па из подударности следи да је $AM = BN$.

($\Longleftarrow$): Уведимо ознаке $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $\measuredangle CAB = \alpha$, $\measuredangle ABC = \beta$, $MC = x$, $NC = y$, $MN = d$, $\measuredangle ANM = \varepsilon$, $\measuredangle CNM = \varepsilon_1$, $\measuredangle BMN = \theta$ и $\measuredangle CMN = \theta_1$. Према услову теореме је

$$|x - y| \leqslant |a - b|, \tag{1}$$

и

$$|a - x - b + y| \leqslant |a - b|. \tag{2}$$

[1] J. Steiner (1796–1863), швајцарски геометричар, D. C. L. Lemus (1780–1863), француски математичар

Без умањења општости доказа претпоставимо да је $a \geqslant b$. Тада је $|a-b| = a-b$. На основу неједнакости (2) је $a - x - b + y \leqslant a - b$, одакле је

$$y \leqslant x. \tag{3}$$

На основу неједнакости (1) је $x - y \leqslant a - b$, па следи да је

$$b - y \leqslant a - x. \tag{4}$$

Применом косинусне теореме на $\triangle AMN$ добија се

$$AM^2 = d^2 + (b-y)^2 - 2d(b-y)\cos\varepsilon,$$

док се применом косинусне теореме на $\triangle BNM$ добија да је

$$BN^2 = d^2 + (a-x)^2 - 2d(a-x)\cos\theta.$$

Како је по претпоставци $AM = BN$, то се из претходног добија

$$(a-x)\cos\theta - (b-y)\cos\varepsilon = \frac{1}{2d}((a-x)^2 - (b-y)^2) \geqslant 0,$$

с обзиром да је $a - x \geq b - y > 0$. Следи да је $(a-x)\cos\theta \geq (b-y)\cos\varepsilon$, а како је $a - x > 0$, то је

$$\cos\theta \geqslant \frac{b-y}{a-x}\cos\varepsilon. \tag{5}$$

На основу (3) у $\triangle MNC$ је $\varepsilon_1 \geqslant \theta_1$, па је $\varepsilon \leqslant \theta$, одакле је

$$\cos\varepsilon \geqslant \cos\theta, \tag{6}$$

с обзиром да је функција cos опадајућа на интервалу $(0, \pi)$. Из (5) и (6) и чињенице да је $\dfrac{b-y}{a-x} > 0$ добија се да је $\cos\theta \geqslant \dfrac{b-y}{a-x}\cos\theta$, тј.

$$\left(1 - \frac{b-y}{a-x}\right)\cos\theta \geqslant 0. \tag{7}$$

Не може бити $\theta \leqslant 90^\circ$, јер би у том случају било и $\varepsilon \leqslant 90^\circ$, па би у $\triangle MNC$ било и $\varepsilon_1 \geqslant 90^\circ$ и $\theta_1 \geqslant 90^\circ$, што је немогуће. Закључујемо да је угао $\theta$ туп, па је $\cos\theta < 0$. Из последње неједнакости и неједнакости (7) закључујемо да је $1 - \dfrac{b-y}{a-x} \leqslant 0$, па је $\dfrac{b-y}{a-x} \geqslant 1$, тј. $b - y \geqslant a - x$. Сада из последње неједнакости и неједнакости (4) следи да је

$$a - x = b - y. \tag{8}$$

Применом косинусне теореме на $\triangle AMB$ добија се

$$AM^2 = c^2 + (a-x)^2 - 2c(a-x)\cos\beta,$$

док је применом косинусне теореме на $\triangle BNA$

$$BN^2 = c^2 + (b-y)^2 - 2c(b-y)\cos\alpha.$$

Изједначавањем претходне две једнакости и коришћењем једнакости (8) добијамо да је $\cos\alpha = \cos\beta$, одакле је $\alpha = \beta$, па следи да је $a = b$. ∎

У наредним разматрањима користићемо ознаке из доказа претходне теореме. Ако су $M$ и $N$ тачке у којима бисектрисе унутрашњих углова код темена $A$ и $B$ секу наспрамне странице, тада је на основу теореме о бисектриси унутрашњег угла троугла $MC = \dfrac{b}{b+c}a$ и $NC = \dfrac{a}{a+c}b$, $MB = \dfrac{c}{b+c}a$ и $NA = \dfrac{c}{a+c}b$, па је у том случају

$$\begin{aligned} |MC - NC| &= \left|\frac{ab}{b+c} - \frac{ab}{a+c}\right| = \frac{ab}{(b+c)(a+c)}\,|a+c-(b+c)| \\ &= \frac{ab}{(b+c)(a+c)}\,|a-b| \leqslant |a-b|\,, \end{aligned}$$

с обзиром да је $\dfrac{ab}{(b+c)(a+c)} \leqslant 1$, јер је $ab \leqslant (a+c)(b+c)$. Такође је

$$\begin{aligned} |MB - NA| &= c\left|\frac{a}{b+c} - \frac{b}{a+c}\right| = \frac{c}{(b+c)(a+c)}\,|a(a+c)-b(b+c)| \\ &= \frac{c(a+b+c)}{(b+c)(a+c)}\,|a-b| \leqslant |a-b|\,, \end{aligned}$$

с обзиром да је $\dfrac{c(a+b+c)}{(b+c)(a+c)} \leqslant 1$, јер је

$$c(a+b+c) = ca+cb+c^2 \leqslant ca+cb+c^2+ab = (b+c)(a+c).$$

Следи да на основу доказане теореме важи

Последица 1. (Штајнер-Лемус) *За троугао $ABC$ еуклидске равни важи $BC = CA$ ако и само ако су одсечци бисектриса унутрашњих углова из темена $A$ и $B$ са страницама $\triangle ABC$ међусобно једнаки.*

Ако су $M$ и $N$ тачке у којима уписана кружница $\triangle ABC$ додирује странице $BC$ и $CA$, редом, тада је $MC = NC = s - c$, $MB = s - b$ и $NA = s - a$, при чему је са $s$ означен полуобим $\triangle ABC$ тј. $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Тада је

$$|MC - NC| = |s-c-(s-c)| = 0 \leqslant |a-b|$$

и

$$|MB - NA| = |s-b-(s-a)| = |a-b| \leqslant |a-b|\,,$$

па на основу доказане теореме важи

Последица 2. *Нека уписана кружница $\triangle ABC$ еуклидске равни додирује странице $BC$ и $CA$ у тачкама $M$ и $N$, редом. Тада је $AM = BN$ ако и само ако је $BC = CA$.*

Ако су $M$ и $N$ тачке у којима спођа уписане кружнице троуглс $ABC$, које одговарају теменима $A$ и $B$, додирују редом странице $BC$ и $CA$, тада је $MC = s - b$, $NC = s - a$ и $MB = NA = s - c$. Следи да је

$$|MC - NC| = |s-b-(s-a)| = |a-b|$$

и

$$|MB - NA| = |s - c - (s - c)| = 0 \leqslant |a - b|,$$

па на основу доказане теореме важи:

Последица 3. *Нека спољa уписане кружнице $\triangle ABC$ еуклидске равни, које одговарају теменима $A$ и $B$, додирују странице $BC$ и $CA$ у тачкама $M$ и $N$, редом. Тада је $AM = BN$ ако и само ако је $BC = CA$.*

Ако су $M$ и $N$ унутрашње тачке редом дужи $BC$ и $CA$, такве да је $MN \parallel AB$, тада је на основу Талесове теореме $\dfrac{MC}{BC} = \dfrac{NC}{CA}$. Означимо последњи количник са $\lambda$. Број $\lambda$ мора припадати интервалу $(0,1)$. Тада је $MC = \lambda a$, $NC = \lambda b$, $MB = BC - MC = (1-\lambda)a$ и аналогно $NA = (1-\lambda)b$, па је

$$|MC - NC| = \lambda\,|a - b| \leqslant |a - b|$$

и

$$|MB - NA| = (1-\lambda)\,|a - b| \leqslant |a - b|\,.$$

Следи да на основу доказане теореме важи

Последица 4. *Нека су у $\triangle ABC$ еуклидске равни, $M$ и $N$ унутрашње тачке редом дужи $BC$ и $CA$ такве да је $MN \parallel BC$. Тада је $AM = BN$ ако и само ако је $BC = CA$.*

Ако у претходној последици тачке $M$ и $N$ одаберемо тако да је дуж $MN$ средња линија $\triangle ABC$ добијамо да важи

Последица 5. *За сваки троугао $ABC$ еуклидске равни важи $BC = CA$ ако и само ако су тежишне дужи $\triangle ABC$ које одговарају страницама $BC$ и $CA$ међусобно једнаке.*

ОШ „Др Драган Херцог“, Београд

*E-mail*: markocos10@hotmail.com