Др Шефкет Арсланагић

ЈОШ ЈЕДНО ПОБОЉШАЊЕ ОЈЛЕРОВЕ НЕЈЕДНАКОСТИ

У математичкој литератури о геометријским неједнакостима веома важну улогу има *Ојлерова неједнакост* за троугао која гласи

$$R \geqslant 2r, \tag{1}$$

где су R и r радијуси описане и уписане кружнице троугла ABC. Она има велику примену код доказивања других неједнакости које се односе на троугао. Рецимо још да се у [1]–[4] налази више побољшања ове неједнакости која гласе:

$$\frac{R}{r} \geqslant \frac{b}{c} + \frac{c}{b}, \qquad \frac{R}{r} \geqslant \frac{2}{3}\Big(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\Big),$$
$$\frac{R}{r} \geqslant \frac{2(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}, \qquad \frac{R}{r} \geqslant \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{4abc},$$
$$\frac{R}{r} \geqslant \frac{2m_a}{h_a}, \qquad \frac{2r}{R} \leqslant \cos^2\frac{\beta-\gamma}{2},$$
$$\frac{R}{r} \geqslant \frac{\sqrt{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}{2abc}.$$

У овом раду ћемо дати још једно побољшање неједнакости (1). Напишимо ту неједнакост у еквивалентном облику

$$\frac{r}{R} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Доказаћемо да важи неједнакост

$$\frac{r}{R} \leqslant 2\sin\frac{\alpha}{2}\Big(1 - \sin\frac{\alpha}{2}\Big), \tag{3}$$

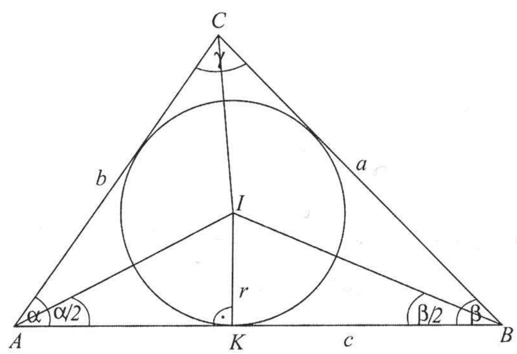
где је $\alpha \in (0,\pi)$ било који од углова датог троугла. Очигледно, неједнакост (3) је боља (јача) од неједнакости (2) јер важи

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\Big(1-\sin\frac{\alpha}{2}\Big) \leqslant \frac{1}{2} \iff 4\sin^2\frac{\alpha}{2} - 4\sin\frac{\alpha}{2} + 1 \geqslant 0 \iff \Big(2\sin\frac{\alpha}{2} - 1\Big)^2 \geqslant 0,$$

а последња неједнакост је тачна. Једнакост важи ако и само ако је $2\sin\frac{\alpha}{2} - 1 = 0$, тј. $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$, односно $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Докажимо сада неједнакост (2). Пре тога ћемо дати два различита доказа тригонометријске једнакости за троугао:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{4R}. \tag{4}$$



Слика 1

Доказ 1. Нека је I центар уписане кружнице у троугао ABC, а K додирна тачка те кружнице и странице AB (сл. 1). На основу синусне теореме важи

$$2R\sin\gamma=AB=AK+KB,$$

а одавде због $AK=r\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$ и $KB=r\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}$ добијамо

$$\begin{aligned}2R\sin\gamma&=r\Big(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\Big)=r\left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\right)\\&=r\left(\frac{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}\right),\end{aligned}$$

одакле је

$$\frac{2R}{r}\sin\gamma\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\sin\Big(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\Big)=\sin\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\Big).$$

Последња једнакост се може написати у облику

$$\frac{4R}{r}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=\cos\frac{\gamma}{2},$$

па због $\cos\dfrac{\gamma}{2}>0$ следи једнакост (4). ■

Доказ 2. Имамо познате обрасце

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\quad \sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}},\quad \sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}},$$

а одавде

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}\cdot\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$
$$=\sqrt{\Big[\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}\Big]^2}=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc},$$

односно, користећи познате обрасце $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $abc=4RP$ и $P=rs$,

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{P^2/s}{4RP}=\frac{P}{4rs}=\frac{rs}{4Rs}=\frac{r}{4R}, \quad \blacksquare$$

Докажимо сада неједнакост

$$1-\sin\frac{\alpha}{2}\geqslant 2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}. \tag{5}$$

Заиста, имамо

$$2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\leqslant 1-\cos\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\Big)$$

(јер је $\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\leqslant 1$ за све $\beta,\gamma\in(0,\pi)$), а одавде следи неједнакост (5).

Најзад, докажимо неједнакост (3). Из (4) и (5) добијамо

$$\frac{r}{2R\sin\frac{\alpha}{2}}=2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant 1-\sin\frac{\alpha}{2},$$

одакле следи да је $\frac{r}{R}\leqslant 2\sin\frac{\alpha}{2}\Big(1-\sin\frac{\alpha}{2}\Big)$, што је и требало доказати. ■

ЛИТЕРАТУРА

[1] Š. Arslanagić, *Matematička čitanka*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.

[2] Š. Arslanagić, *Matematička čitanka 2*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2010.

[3] Š. Arslanagić, *Matematička čitanka 6*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2014.

[4] Š. Arslanagić, *Die Verbesserung einer trigonometrischen und einer geometrischen Ungleichung*, Die Wurzel (Jena), Vol. 52, März/April 2018, 81–85.

Универзитет у Сарајеву, Босна и Херцеговина

E-mail: asefket@pmf.unsa.ba