Др Милан Живановић

МАТЕМАТИЧКИ ПРОБЛЕМИ О ШАХОВСКИМ ТУРНИРИМА

Опште је прихваћено мишљење да је савремена математика ушла у готово све поре људског деловања. Не треба занемарити ни повратни утицај других делатности на математику. За наставу математике од значаја је искористити повезаност математике са реалним актуелним проблемима, али и са феноменима који поседују широку популарност или својом структуром корелирају са више математичких дисциплина. Шах као интелектуална игра и професија у правој мери одговара свим овим захтевима. Математичка проблематика на шаховској табли је веома разноврсна те се за њено третирање користе различите математичке дисциплине. У овом тексту ограничићемо се на проблеме везане за шаховске турнире.

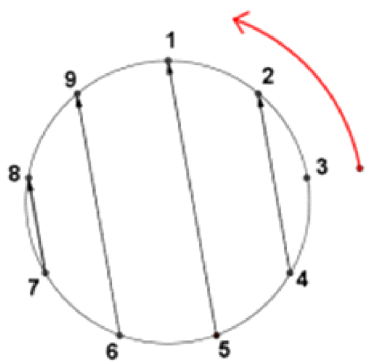
У шаху као и у већини спортских такмичења постоје два основна типа организације. Први је елиминаторни или куп систем. Организује се по правилу на такмичењима са великим бројем играча када је временски и просторно немогуће остварити дуеле сваког играча са осталим учесницима. У оваквим надметањима победници настављају такмичење до финалног меча чији је победник уједно и победник турнира. Ако се парови у такмичењу бирају на случајан начин кажемо да је елиминаторни систем *слободан*. Уколико се на почетку турнира желе избећи дуели квалитетнијих такмичара, онда им се на основу „јачине" додељују редни бројеви тако да се фаворити могу срести тек у завршници турнира. Такав систем паровања зовемо *диригован*.

Други систем такмичења је *кружни* или *лига систем*. У оваквом такмичењу сваки играч игра са сваким. Лига се најчешће игра једнокружно (по једна партија међу учесницима) или двокружно, а ређе вишекружно. Лако је доказати да је у једнокружном систему од n играча број партија једнак $\dfrac{n(n-1)}{2}$. За победу у шаховској партији играч добија 1 поен, за реми 0.5, а за пораз 0 поена. На тај начин је број поена у расподели на неком турниру једнак броју одиграних мечева.

Посебан проблем је одређивање парова на турниру по кружном систему. За дати број играча постоје тзв. *Бергерове таблице* на основу којих се одређују парови сваког кола турнира. Те таблице се могу исписати применом алгебарског, аритметичког или графичког метода паровања. Најједноставнији поступак паровања је графичким методом[1]. Конструише се најпре круг а затим се изван њега

[1] Графички метод паровања осмислио је наш шаховски мајстор Драгутин Ђаја.

упишу бројеви кола правилно распоређени у смеру казаљке на сату за задати број учесника. Уколико је број играча непаран, исписују се сви бројеви до тог непарног броја, а уколико је паран уписују се бројеви закључно са бројем који је за 1 мањи од броја играча. Дуел парови за задати редни број кола се добијају тако што се број 1 спаја линијом са бројем одговарајућег кола. Остали парови се добијају тако што се линијама паралелним овако конструисаној линији спајају остали бројеви. Овом конструкцијом један број остаје без пара. У случају парног броја учесника играч са тим редним бројем игра против играча са највећим редним бројем или је слободан уколико је број играча непаран. Изузетак је прво коло у којем играч са редним бројем кола игра са играчем са последњим редним бројем, ако је број играча паран, или је слободан ако је број играча непаран. За одређивање такмичара са првенством првог потеза конструишу се стрелице на овако добијеним линијама идући по кругу у смеру супротном од кретања казаљке на сату почев од броја који на кругу нема свог пара (слика 1).



Слика 1. Пример за одређивање парова у 5. колу кружног такмичења са 9 или 10 играча

Погледајмо неколико задатака о шаховским турнирима.

1. На турниру су учествовали шахисти из p држава, редом из сваке n_1, n_2, $\dots$, n_p такмичара. Прво је у свакој држави такмичење одиграно по куп систему, а онда су победници по истом систему наставили даље такмичење до финалног дуела и укупног победника. У сваком дуелу је играна једна партија, а ако је завршена ремијем, пораженим се сматрао играч са белим фигурама. Колико је укупно партија одиграно?

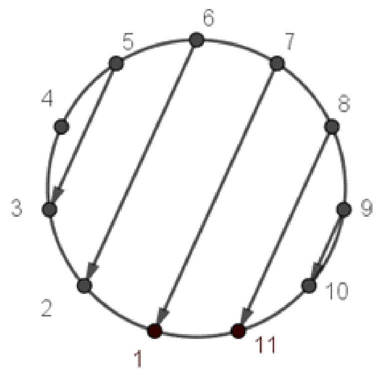
Решење. Број одиграних партија на турниру елиминационим системом једнак је броју поражених учесника. Завршно са финалним мечом сви учесници сем победника ће бити поражени. Закључујемо да је на турниру одиграно $n_1 + n_2 + \cdots + n_p - 1$ партија.

2. Пре почетка шампионата школе у шаху играном по лига систему сваки такмичар је прогнозирао место које ће освојити на крају турнира. Најмлађи ученик Јован је рекао да ће бити последњи, а сваки играч је прогнозирао различита места. На крају турнира се испоставило да су сви ученици, наравно сем Јована, остварили лошији пласман од прогнозираног. Које место је освојио Јован?

Решење. Како је сваки играч сем Јована остварио лошији пласман од планираног, значи да нико од њих није био први. Дакле, Јован је на крају турнира освојио прво место.

3. Одредити парове 7. кола на једнокружном турниру од 12 такмичара.

Решење. Применом графичке методе добијамо да су парови 7. кола: 7-1, 6-2, 5-3, 8-11, 9-10, 4-8. Видети слику 2.



Слика 2

4. На турниру са парним бројем играча играном по једнокружном систему одиграно је 55 партија. Један учесник је напустио такмичење одмах после првог кола, а други после десетог. Да ли су та двојица одиграла партију међусобно?

Решење. Нека је x број играча на почетку турнира. У том случају би сваки играч до краја турнира одиграо $x-1$ меч, а укупан број мечева на турниру би био $\dfrac{x(x-1)}{2}$. Први учесник који је напустио такмичење није одиграо $x-2$ меча, а други $x-11$ мечева. Ако та два играча нису одиграли заједнички меч, број неодиграних партија је $2x-13$, а ако су одиграли заједнички меч, број неодиграних партија је $2x-12$. Првом случају одговара једначина $\dfrac{x(x-1)}{2} - 55 = 2x-13$, а другом $\dfrac{x(x-1)}{2} - 55 = 2x-12$. Решења прве једначине су $x_1 = 12$ или $x_2 = -7$, док друга једначина нема целобројна решења. Услов задатка је задовољен за $x_1 = 12$, што значи да играчи који су напустили турнир нису одиграли међусобни меч.

5. На турниру је учествовало n шахиста. Неки од њих су били мајстори, а неки велемајстори. На крају се испоставило да је сваки играч половину својих бодова освојио у мечевима са мајсторима. Докажите да је $\sqrt{n}$ природан број.

Решење. Нека је на турниру учествовало m мајстора и v велемајстора. Мајстори су у међусобним дуелима освојили $\dfrac{m(m-1)}{2}$ бодова и исто толико у дуелима са велемајсторима. Такође, велемајстори су у међусобним дуелима освојили $\dfrac{v(v-1)}{2}$ поена и толико у дуелима против мајстора. Број дуела мајстора против велемајтора с друге стране једнак је mv. Закључујемо да је $\dfrac{m(m-1)}{2} + \dfrac{v(v-1)}{2} = mv$. Из последње једнакости следи $n = m+v = (m-v)^2$, односно $\sqrt{n} = \sqrt{(m-v)^2} = |m-v|$.

6. После једнокружног турнира у којем је учествовало 20 такмичара новинар је известио да је сваки играч имао подједнак број победа и ремија. Да ли је његово тврђење тачно?

Решење. Претпоставимо да сваки играч има једнак број победа и ремија и нека је за i-тог играча тај број једнак x_i. Тада је број његових пораза једнак $19 - 2x_i$. Укупан број победа на турниру једнак је броју пораза, тј. $\sum_{i=1}^{20} x_i = \sum_{i=1}^{20}(19 - 2x_i)$. После сређивања добија се $3 \cdot \sum_{i=1}^{20} x_i = 20 \cdot 19$. Значи, лева страна једнакости је дељива са 3, а десна није. Дакле, извештај новинара није истинит.

7. На шаховском турниру играном по једнокружном систему учествовали су ученици средње школе и два ученика основне школе. Два основца су освојила укупно 3.5 бодова, а сви средњошколци су освојили једнак број бодова. Колико средњошколаца је учествовало на турниру?

Решење. Нека је x број средњошколаца који су учествовали на турниру. Тада је укупан број играча $x + 2$, а број одиграних партија $\frac{(x+2)(x+1)}{2} = \frac{x^2+3x+2}{2}$ једнак је броју освојених поена. С обзиром да су основци освојили укупно 3.5 поена, то су средњошколци освојили $\frac{x^2+3x+2}{2} - \frac{7}{2} = \frac{x^2+3x-5}{2}$ поена. У том случају број x^2+3x-5 мора бити дељив са x тј. $x+3+\frac{5}{x}$ мора бити природан број. Директном провером закључујемо да је $x = 5$ тражено решење.

8. Неколико дечака и девојчица учествовало је на шаховском турниру по једнокружном систему. Девојчице су освојиле укупно 13 бодова, а сваки дечак, којих је било три пута више од девојчица, освојио је исти број поена. Колико је било учесника турнира?

Решење. Нека је на турниру учествовало x девојчица и $3x$ дечака. Укупан број освојених поена једнак је броју одиграних партија, $\frac{4x(4x-1)}{2} = 8x^2 - 2x$. Нека је сваки дечак освојио y бодова. Тада је $3xy = 8x^2 - 2x - 13$, тј.
$x(8x - 2 - 3y) = 13$. Како је 13 прост број, лако се провери да не постоје парови целобројних решења последње једначине. Дакле дечаци нису појединачно освојили цео број поена, па их мора бити паран број, а број поена који је сваки освојио мора бити изражен као непаран број половина. Можемо уочити два случаја: $x = 2$, $8x - 2 - 3y = \frac{13}{2}$ или $x = 26$, $8x - 2 - 3y = \frac{1}{2}$. Одговарајући парови решења су $x = 2$, $y = 2.5$ или $x = 26$, $y = 68.5$. Укупан број учесника је у првом случају 8, а у другом 104.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Я. Гик, *Математика и шахматы*, Квант **24** (1983).

[2] М. Живановић, *Математика на шаховској табли*, Семинар о настави математике, електронска верзија, `https://www.geogebra/org/m/yqthuxaq`

[3] А. В. Шаповалов, *Задачи о турнирах*, МЦНМО, Москва, 2016.

Висока школа за васпитаче, Крушевац

E-mail: `mzivanovic@vaspks.edu.rs`