Душица Марковић

ПОВРШИНА КРУГА

За математику се често каже да је господарица, али истовремено и слушкиња других наука, јер је у њеним рукама кључ когнитивних сазнања и њихове примене. Зато настава математике изискује посебну суптилност у раду. Њен задатак је да код ученика усагласи разумевање апстрактних структура са њиховим интуитивним перцепцијама и представама. Зато успешност часа зависи од степена личног ангажовања ученика, односно њихове мотивисаности за рад. На примеру наставне јединице „Површина круга", која се обрађује у VII разреду основне школе, дато је промишљање о могућности оптималне поставке дидактичко-методичких елемената часа.

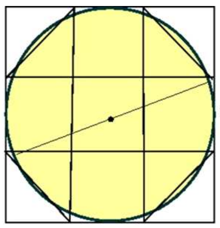
Примарни циљ часа је усвајање појма површине круга и поступка њеног израчунавања. Секундарни циљеви су бројнији и односе се на развијање способности за посматрање, анализу, разумевање и представљање математичких процеса, њихово апстраховање и доношење закључака. Тема часа има вишеструку примену, што упућује на корелативност са српским језиком, историјом, информатиком, географијом, ... Као један од постулата савремене наставе, иновативност је у раду заступљена у три кључна сегмента. У сазнајном, кроз коришћење алегоријске приче, инквајери приступа и примени хеуристичке методе; у практичном, кроз рад на експерименту и историјском контексту проблема и емотивном домену, кроз рад у тиму и на подстицању личне радозналости ученика.

Иницијална прича „Полигон" уводи у час. Вељко наводи практичне разлоге за изучавање површине круга кроз свој лични доживљај: „Био је леп, сунчан дан. Радовао сам се одласку у школу, јер нас је чекало исцртавање школског полигона, као припрема за будуће такмичење у познавању саобраћаја. Данас правимо скицу терена и израчунавамо количину неопходног материјала за његово исцртавање и фарбање. Нисам могао ни слутити праву „математичку" мору – било је неопходно израчунати површину круга ... Можда сам и први пут са нестрпљењем очекивао час математике, решен да питам наставницу како се израчунава површина круга ... ".

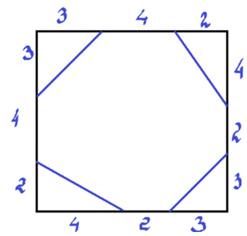
Питању израчунавања површине круга приступа се на истраживачки начин, кроз задатак стар око 4 000 година. Ученицима се предочава чињеница да су стари Египћани решавали исти проблем и да су пронађена разна решења. О томе нам сведоче делови староегипатске математике који су сачувани на два свитка – Ахмесовом и Московском папирусу.

Ахмесов папирус је „студија о свим стварима, поглед у унутрашњост свега што постоји, саоткриће о тамним тајнама". Откривени фрагменти говоре о богатству комплетног оригиналног списа. Свој истраживачки рад ученици ће реализовати у оквиру једног од четири тима: Ахмес 48, Ахмес 50, Кишна кап и Број π.

Први тим, *Ахмес 48*, обрађује 48. задатак са Ахмесовог папируса са циљем навођења на идеју апроксимације круга многоугловима (уписаним у кружницу, односно описаним око ње). Ову идеју је касније разрадио Архимед.



Слика 1



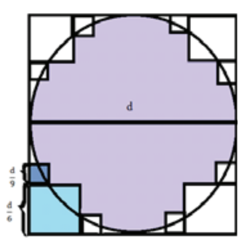
Слика 2

Ученицима се даје следећи задатак: „Израчунати приближно површину круга пречника 9 кхета (*кхет* је староегипатска мера за дужину), користећи слике 1 и 2, тј. апроксимирајући га осмоугловима на датим сликама.

У првом случају, од површине описаног квадрата (9^2 квадратних кхета) треба одузети четири површине једнакокрако правоуглог троугла катете 3 кхета ($\frac{1}{2} \cdot 3^2$ квадратних кхета). Резултат је $81 - 2 \cdot 9 = 63$ квадратна кхета.

У другом случају, од површине квадрата треба одузети двоструку површину претходно поменутог троугла, као и двоструку површину правоуглог троугла с катетама 4 и 2 кхета. Резултат је $81 - 9 - 4 \cdot 2 = 64$ квадратна кхета.

Други тим, *Ахмес 50*, обрађује 50. задатак с Ахмесовог папируса са циљем објашњавања „пута" којим су ишли стари народи. Ово је једна у низу алтернативних метода за одређивање површине круга.



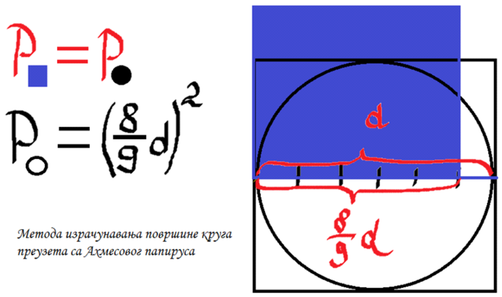
Слика 3

Најпре се тражи да се приближно одреди осенчена површина на слици 3. Она се добија кад се од површине квадрата странице d одузму четири површине квадрата странице $\dfrac{d}{6}$ и 8 површина квадрата странице $\dfrac{d}{9}$.

Добија се

$$\begin{aligned} P &= d^2 - 4 \cdot \left(\frac{d}{6}\right)^2 - 8 \cdot \left(\frac{d}{9}\right)^2 \\ &= d^2 - \frac{1}{9}d^2 - \frac{8}{81}d^2 = \frac{64}{81}d^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2. \end{aligned}$$

Добијени резултат се поклапа са упутством за одређивање површине круга датим у задатку 50 Ахмесовог папируса, представљеним (без претходног објашњења) сликом 4.



Слика 4

Посебно, ако је пречник круга d једнак 9 кхета, добија се да је површина круга 64 квадратна кхета.

Трећи тим, *Кишна кап* има задатак да посматра природне појаве са циљем уочавања да се свакој физичкој величини може придружити математичка формула која је апстрактно дефинише или израз који је објашњава. На пример, број π се појављује у великом броју математичких формула, затим у одређивању брзине падања кишних капи, вероватноће настајања живих бића, начина на који се шири космос итд.

Четврти тим, *Број* π, треба да у припреми за час, кроз математички времеплов (користећи интернет), истражи историјски контекст проблема који су довели до сазнања о броју π, од Ахмесовог папируса, преко Архимеда из Сиракузе, Лудолфа ван Цојлена до Вилијама Џоунса.

Обједињујући закључке сва четири тима, ученици долазе до закључка да је површина круга пропорционална квадрату полупречника r (односно пречника d):

$$P = \pi r^2 = \frac{\pi}{4}\, d^2.$$

За коефицијент пропорционалности π, на основу резултата првог тима закључује се да треба да буде приближно

$4 \cdot \dfrac{63}{81} = 3{,}15$ или $4 \cdot \dfrac{64}{81} = 3{,}1605$.

Ова друга вредност се добија и из резултата који је добио други тим. Но, четврти тим је, истражујући на интернету, нашао следеће приближне вредности броја π које су коришћене кроз историју:

$\dfrac{22}{7} \approx 3{,}142857$ (Архимед, 287–212. п.н.е). Овај резултат Архимед је добио рачунајући површине уписаног и описаног 96-угла за дати круг.

3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 (Лудолф ван Цојлен, 1540–1610). Ван Цојлен је провео скоро трећину свог живота рачунајући ових 35 децимала броја π; оне су исписане на његовом надгробном споменику, а π се због овога једно време називао и Лудолфовим бројем.

Вилијам Џоунс (1675–1749) је 1706. године увео ознаку π за овај број, као скраћеницу за грчки термин „периметар" (обим).

Данас се помоћу суперкомпјутера може израчунати више трилиона (!) децимала броја π. Такво израчунавање никад не може бити завршено, јер се још од 18. века зна да је π *ирационалан број* (дакле, он се не може тачно представити као разломак, а низ његових децимала је бесконачан и није периодичан). Штавише, крајем 19. века је доказано да је π *трансцендентан број*, што значи да га је немогуће изразити помоћу четири основне рачунске радње и кореновања, примењених коначно много пута на целе бројеве.

Практични рад на часу је подједнако важан и потребно је да буде заступљен. Тимови су извели једноставан експеримент користећи хартију у боји. Конструисали су кругове полупречника 10 cm и поделили их редом на четири, шест, осам и десет једнаких кружних исечака. Затим су их пресложили. Резултат је био импресиван – од делова круга „сложен" је паралелограм. Што су делови били ситнији, паралелограм је био ближи правоугаонику. Закључак је да су површине фигура у равни једнаке. Користећи GeoGebr-у до сличне визуализације се долази на рачунару.

Предвиђене активности подразумевају потпуну посвећеност сваког ученика тако да се може говорити о активној настави. Откривање теорије и израда задатака, осмишљени су на два нивоа. Понуђен је наставни материјал који информише и задаци с јединственим решењима, чиме се код ученика постиже конвергентно, усмерено мишљење и закључивање по аналогији. Дати су текстови који код ученика подстичу расуђивање и „суд", као и задаци са вишеструким решењима. Кроз историјски контекст анализирана је генеза решавања проблема површине круга и њеног израчунавања, а може се погледати и на линку

`https://prezi.com/4br2p5avnoz0/presentation/Prezi`.

У завршном делу часа је предвиђена квантитативна евалуација и провера оспособљености ученика да конструктивно одговоре на питања:

Да ли се формулом $P = \pi r^2$ постиже апсолутна тачност у израчунавању површине круга?

Да ли је могуће одредити грешку? Када је грешка занемарљива, а када на њу треба обратити пажњу?

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Живановић, ***Историјски садржаји у настави математике***, Материјал предвиђен за Државни семинар ДМС, фебруар 2017. год.
2. А. Андрејић, ***Историја математике – семинарски рад***, Висока школа електротехнике и рачунарства, Београд.

3. Geogebra: https://www.geogebra.org/m/ebpKQ5C7#material/Hv9KA6wE
4. Vikipedija: https://sr.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B8,
https://sr.wikipedia.org/sr/%D0%9B%D1%83%D0%B4%D0%BE%D0%BB%D1%84_%D0%B2%D0%B0%D0%BD_%D0%A6%D0%BE%D1%98%D0%BB%D0%B5%D0%BD
5. Центар за промоцију науке:
http://elementarium.cpn.rs/teme/iracionalni-gospodin-pikao,
http://elementarium.cpn.rs/teme/pi/

ОШ „Стефан Немања, Ниш
E-mail: dusicamarkovic33@hotmail.com