НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
LXIV, 3-4 (2019), 79–83

Др Милош Миловановић

МЕТОДОЛОШКЕ ИДЕЈЕ ПРОФЕСОРА ПРЕШИЋА[1]

Октобра 2000. године, одржано је једно од последњих излагања на Семинару за методику Математичког факултета који се у дужем периоду састајао месечно разматрајући делатне теме из наставе и науке. Предавач је овог месеца био Славиша Прешић који је исте године пензионисан у звању редовног професора, али је још испитивао студенте не само из алгебре већ и методике. Присуствовало је не више од десет људи укључујући предавача, што није мало ако се имају у виду бурна збивања српске политике која су претила да створе још једну у низу нерегуларних година на универзитету.

Тема је гласила *Неке методолошке идеје у математици* и започела је Прешићевим ставом да општа педагогија математике представља њено упропашћавање. Илузија је да постоји јединствена педагогија која би нам помогла да држимо наставу из разних предмета – као што су математика, физика, географија, историја, биологија, уметности и др. Главни разлог је што свака од тих области има своје посебности у толикој мери, да скоро да нема две од њих којима би одговарала слична метода. Стога математику може добро предавати само онај ко је најпре добар математичар и потом добар методичар [3, Виђење 67, стр. 52].

Прешић заправо никада није одвајао наставу од истраживања у науци. Сматрао ју је саставним делом научног рада, тврдећи да су исти поступци који доводе до открића уједно примењиви на наставу математике. Излагање према томе није садржало општа места, већ се безмало тицало математичке методологије чији неотуђиви чинилац представља наставна делатност. Његову реконструкцију учинићемо ослањајући се на његова дела *Разнице* и *Мисаона виђења* у којима су представљене три тада поменуте идеје: преноса, непознатих упоришница и свођења на решени облик. Осим њих, у овим делима су такође присутне методолошке идеје сенке и трагова, па ће и о њима бити речи.

[1] Чланак је изложен на конференцији посвећеној проф. др Славиши Прешићу 14–15. децембра 2018. године у Београду. Подржало га је Министарство просвете, науке и технолошког развоја републике Србије кроз пројекат III 044006.

Методолошка идеја преноса

Представљање ове идеје започињемо примером из Разница [1, стр. 19] и пропратном методолошком напоменом.

„Решити по $x \in \mathbf{R}$ једначину $2^x + x = 2^3 + 3$.

Решење. Није тешко видети да број 3 јесте једно решење. Доказујемо да је и једино. Заиста, нека је a ма који број различит од 3. Тада:

Ако је $a > 3$, имамо $2^a > 2^3$, па је $2^a + a > 2^3 + 3$, тј. $2^a + a \neq 2^3 + 3$.

Ако је $a < 3$, имамо $2^a < 2^3$, па је $2^a + a < 2^3 + 3$, тј. $2^a + a \neq 2^3 + 3$.

Значи, ниједан број изузев 3 не може бити решење, па је затворен доказ јединствености тог решења.

Методолошка напомена 14.1. Можемо се питати да ли такву замисао решавања има само та једначина или слично важи и за разне друге? Да бисмо то прозрели, размотримо наведени доказ чији је плод: једначина изузев 3 нема никоје друго решење. Та једначина се односи на структуру $\mathbf{R}$, па се у наведеном доказу користе разне њене чињенице као: 3 је један од њених чланова, $+$ је операција, 2^x расте кад се x повећава, итд. Иначе је јасно да уопште о структури $\mathbf{R}$ има бескрајно много тврђења, али услед коначности тај (па и сваки други) доказ може користити само коначан низ. И сада је питање како да пронађемо те – рећи ћемо – *упоришнице* доказа. Одмах истакнимо да у том смислу постоје разне могућности. По правилу, након налажења упоришница, а оне су плод, слободније речено, „логичког скрозирања, логичког цеђења“ дотичног доказа – гради се ново општије тврђење, за које се каже да из полазног настаје *методолошком идејом преноса.*

Рецимо, „логичким скрозирањем, цеђењем“ реченог доказа можемо изрећи ово тврђење:

> Нека је $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ реална функција која је растућа и нека је a ма који реалан број. Тада x-једначина $f(x) = f(a)$ има јединствено решење a.

Истичемо да је идеја преноса једна од најважнијих истраживачких, тј. методолошких идеја у математици уопште.“

Методолошка идеја преноса је заправо изданак шире идеје коју је Прешић називао *удахни ваздух и начини мисаони заглед*: покушај да се значење израза заборави како бисмо га сагледали изван подразумеване семантике. Полазимо од извесног тврђења које желимо да уопштимо трагајући за његовим упоришницама, а потом ће тврђење датог облика важити у свим околностима када уочене упоришнице важе. Њени плодови су метрички простори који настају уопштењем растојања или пак нормирани простори који су уопштење апсолутне вредности. Многи простори у функционалној анализи су такође рођени преносом извесних тврђења о реалним бројевима [2, Виђење 43, стр. 90–94].

Он је ову идеју описивао речима: „Када ствари ћуте, видимо много више,“ при чему је такво *удахњивање ваздуха* сматрао за пример *мисаоног винућа.* Говорио је како *мора ствара море*, а да често мора наступа када неки став проглашавамо природним. У намери да хлади главу од таквих ставова, говорио је: „Што дикла навикла,“ хотећи тиме да каже – што би ти уопште био природан [2, Виђење 42, стр. 88, фуснота 2]. Плодове ове методе је притом називао *опране ротквице*, наглашавајући јој исконски значај. У излагању се, међутим, запитао и о њеним границама примећујући да идентитет још нико није имао смелости разматрати на тај начин. Овом методом се обично не нападају појмови једнакости, функције, скупа и сл, који представљају логички скелет уопштаваног тврђења.

Методолошка идеја непознатих упоришница

Насупрот идеји преноса која полазећи од упоришница омогућава уопштење става, овај поступак се темељи на реконструкцији упоршиница када је став познат. Од особе се примера ради тражи да замисли број, затим му дода још толико, па још 10, пола баци у воду и на крају одузме број који је замислила да би на крају остало 5. Уколико пак реконструишемо наведени задатак, потребно је присетити се упоришница на којима почива како бисмо полазећи од уопштења генерисали појединачни пример. Прешић је ово назвао *методолошком идејом непознатих упорипница.*

Методолошка идеја свођења на решени облик

Ако упитамо ђака „колико је 5+6“, а он нам одговори „6+5“ – склони смо да се наљутимо. Међутим, он нам с пуним правом приговара: „А шта си ме уопште питао?“ У том погледу, математика умногоме наликује одгонетању загонетке што је чини нераскидивим чиниоцем народног предања. Притом је од значаја да се решење синтаксно одреди како бисмо били начисто шта значи *решавање.* С тим у вези, по математичким збиркама се често сусрећу задаци типа *упрости израз* – који ни изблиза нису уредно постављени.

Кажемо да је пресликавање F репродуктивно ако важи $F{\circ}F = F$, а једначина ако је облика $x = F(x)$, где је F репродуктивно пресликавање. За сваку једначину која има решење, постоји репродуктивна која јој је еквивалнетна. Сва решења су тада задата правилом $x = F(\alpha)$, што нас наводи да репродуквиност сматрамо решеним обликом. Примера ради, функционална једначина $f(x) = f(-x)$ се своди на облик $f = F(f)$, где је $F\colon f(x) \mapsto \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ репродуктивно пресликавање. Решења ове једначине су према томе $f = F(\alpha)$, тј. $f(x) = \dfrac{\alpha(x)+\alpha(-x)}{2}$ [2, Виђење 46, стр. 102–105].

С тим у вези, помињем виђење професора Прешића које се није нашло у његовим делима. Он је дуго година боравио у својој викендици на Авали и често шетао по околини, срећући успут Цигане[2] из краја. Деца су га волела јер би причао с њима и дао им понеки динар. Једном приликом је рекао Циганчету: „Даћу ти банку ако ми одговориш шта је сутра од јуче.“ Оно стаде, размисли, па рече: „То је као кад спавам, па се пробудим.“ Јуче је наиме *вчер*, а сутра

[2]Употребљавамо термин који је проф. Прешић користио без намере да било кога увреди, што је очигледно у наставку чланка.

је *с јутра* – и шта би било сјутра од вечери него кад *спаваш, па се пробудиш.* Циганче је заправо свело задатак на решени облик. Прешић је ово истицао за пример како Цигани нису тривијални и да су далеко испред западњака које је сматрао обрисаним говорећи како немају чуло за било какву духовност.

На репродуктивни облик се наилази у бројним делатностима међу којима је уметничко стваралаштво. Деловањем сликара од старе слике настаје нова, све док се не доспе до завршног облика. Завршена слика је плод стваралачког процеса, представљајући решење које одговара појму репродуктивности [2, Виђење 47, стр. 105–106].

Методолошка идеја сенке

Претпоставимо да неку особу заклања зид тако да је не видимо, али опажамо њену сенку тако да можемо сазнати понешто о особи. Сличне игре су се често јављале у квизовима, било да се ради о скривеној личности или предмету.

Прешић је за пример ове методолошке идеје узимао теорију Галоа који је, при расправљању питања да ли је полиномна једначина J решива у радикалима, свакој једначини придружио њену сенку $G = Sen(J)$. Те сенке су припадале новој земљи коју је Галоа открио, назвавши је *теорија група.* Тиме је решивост извесне једначине сведена на питање да ли њена сенка, која представља пермутације решења, има опадајући низ нормалних подгрупа [2, Виђење 40, стр. 68].

Осим овог примера, сенке су геометријске пројекције, алгебарски хомоморфизми и аналитичка операција диференцирања [3, Виђење 68, стр. 61–73]. Еуклидов алгоритам за изналажење највећег заједничког делиоца је такође руковођен методолошком идејом сенке, будући да се проблем рекурзивно своди на наредни корак чије је решење исто као у претходном [4, Виђење 112, стр. 107–121].

Методолошка идеја трагова

Нека је дата функционална једначина $f(x,y) + f(y,z) + f(z,x) = 0$, у којој је функција $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ непозната. Није тешко увидети да јој је решење дато у облику $f(x,y) = g(x) - g(y)$, будући да важи

$$(g(x) - g(y)) + (g(y) - g(z)) + (g(z) - g(x)) = 0.$$

Заправо, најчешће, када вам неко каже *лако се види* – то треба да значи *не питај ме како сам га решио.* Прешић се жестоко супротстављао таквом становишту. У поверењу је говорио да када математичар више од три пута употреби реч *тривијално*, ту је ствар пропала. Овај израз потиче од назива за нижи ступањ образовања који обухвата три дисциплине: граматику, реторику и логику (на латинском trivium – тропуће), где математика међутим уопште није спадала. Стога се она не да тривијализовати, већ јој је сваки увид од суштинског значаја.

Методолошка идеја се састоји у томе да оживимо једначину и допустимо јој да дејствује остављајући трагове. Другим речима, разматрамо њене последице не бисмо ли тим путем изнашли опште решење. На пример, за $z = 0$, једначина постаје $f(x,y)+f(y,0)+f(0,x) = 0$, одакле следи $f(x,y) = -f(y,0)-f(0,x)$. На сличан начин добијамо $f(y,z) = -f(z,0) - f(0,y)$ и $f(z,x) = -f(x,0) - f(0,z)$, чиме полазна једначина постаје

$$f(x,0) + f(0,x) + f(y,0) + f(0,y) + f(z,0) + f(0,z) = 0.$$

За $y = z = 0$, одатле следи $f(x,0)+f(0,x) = 4f(0,0) = 0$, па уврштавајући $x = 0$ добијамо $6f(0,0) = 0$ откуда добијамо $f(x,0)+f(0,x) = 0$, тј. $-f(0,x) = f(x,0)$.

Најзад, уз помоћ првог трага произилази

$$f(x,y) = -f(y,0) - f(0,x) = -f(y,0) + f(x,0) = g(x) - g(y),$$

при чему је $g(x) = f(x,0)$ произвољна функција једне промењливе. Прањем ротквице, тј. идејом преноса, исти поступак решава функционалну једначину чија је област вредности ма која група G [5, Виђење 160, стр. 55–59].

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Б. Прешић, *Разнице 1*, Мала математичка библиотека, Просветни преглед, Београд 1997.
[2] С. Б. Прешић, *Мисаона виђења 1*, Библиотека Посебна издања, Плато, Београд 2000.
[3] С. Б. Прешић, *Мисаона виђења 2*, Библиотека Посебна издања, Плато, Београд 2001.
[4] С. Б. Прешић, *Мисаона виђења 4*, Библиотека Посебна издања, Плато, Београд 2002.
[5] С. Б. Прешић, *Мисаона виђења 7*, Библиотека Мисаона виења, С. Б. Прешић, Београд 2007.

Математички институт САНУ, Кнеза Михаила 36, 11000 Београд
E-mail: milosm@mi.sanu.ac.rs