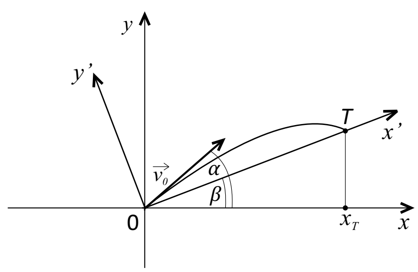
Борис Башић, Алија Муминагић

ФИЗИКА ПОМАЖЕ МАТЕМАТИЦИ

У овом кратком прилогу показаћемо како се може примениити знање о косом хицу за доказивање адиционе формуле

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta.$$



Слика 1

Нека се топ налази у подножју брда које се под углом β уздиже према хоризонталној равни. Топовска граната испаљена је с почетном брзином v_0 (то је брзина гранате у тренутку $t = 0$) под углом елевације α и након неког времена пада на падину брда (у тачку T, в. слику). Претпоставимо да је граната у тренутку $t = 0$ у координатном почетку O, а координатна раван xOy нека се подудара с равни лета гранате. Отпор ваздуха се занемарује.

Из физике нам је познато да је закон кретања гранате дат једначинама

$$x_G = v_0\cos\alpha \cdot t,$$
$$y_G = v_0\sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2.$$

То су и координате тачке T за неку вредност времена $t = t_1$, дакле

$$T\Big(v_0\cos\alpha \cdot t_1\,,\ v_0\sin\alpha \cdot t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2\Big).$$

Нека је $|OT| = d$. У правоуглом троуглу Ox_TT је $x_T = d\cos\beta$, тј.

$$d\cos\beta = v_0\cos\alpha \cdot t_1, \tag{1}$$

као и $y_T = d\sin\beta$, тј.

$$d\sin\beta = v_0\sin\alpha\cdot t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2. \tag{2}$$

Множењем једнакости (1) са $\sin\beta$, а једнакости (2) са $\cos\beta$ и одузимајући добијене једнакости, добијамо

$$v_0\cos\alpha\sin\beta\cdot t_1 = v_0\sin\alpha\cos\beta\cdot t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2\cos\beta,$$

одакле је (због $t_1 \neq 0$)

$$t_1 = \frac{2v_0(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)}{g\cos\beta}. \tag{3}$$

Заротирајмо сада координатни систем Oxy за угао β у смеру супротном од кретања казаљке на сату (у систем $Ox'y'$, в. слику). Компоненте почетне брзине гранате у новом систему су $v_0\cos(\alpha-\beta)$ и $v_0\sin(\alpha-\beta)$. Како вектор гравитационог убтзања са осом Ox' гради угао $\pi/2-\beta$, његове компоненте у том систему су $g\sin\beta$ и $g\cos\beta$, па једначине кретања добијају облик

$$\begin{aligned} x'_G &= v_0\cos(\alpha-\beta)\cdot t - \frac{1}{2}g\sin\beta\cdot t^2,\\ y'_G &= v_0\sin(\alpha-\beta)\cdot t - \frac{1}{2}g\cos\beta\cdot t^2. \end{aligned} \tag{4}$$

У тачки домета T је $t = t_1$ и $y'_G = 0$, па из (4) добијамо да је тада

$$t_1 = \frac{2v_0\sin(\alpha-\beta)}{g\cos\beta}. \tag{5}$$

Коначно, из (3) и (5) следи

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Једнакост

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

следи из претходне коришћењем непарности функције sin и парности функције cos.

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Muminagić, MiŠ (Matematika i škola), časopis za nastavu matematike, **100**, 20 (2019), s. 214, Element, Zagreb.

[2] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

B.B.: Sarajevo, Bosna i Hercegovina

A.M.: Frederiksberg, Danska

E-mail: `fatima.muminagic@gmail.com`