Весна Бал и Марија Бал

ИРАЦИОНАЛНЕ НЕЈЕДНАЧИНЕ

Циљ овог рада је да се уоче логичке везе дате ирационалне неједначине и оне која настаје њеним квадрирањем.

Задатак 1. Решити неједначине:

(i) $\sqrt{1-x^2} > 3x-1$; (ii) $\sqrt{1-x^2} < 3x-1$.

Истакнимо најпре да је код оваквих задатака први корак одређивање *домена задатка*, што је у нашем случају скуп $[-1,1]$ (јер мора бити $1-x^2 \geqslant 0$).

(i) Квадрирајмо сада леву и десну страну неједначине (i):

$$(\sqrt{1-x^2})^2 > (3x-1)^2, \quad 1-x^2 > 9x^2-6x+1, \quad 10x^2-6x<0.$$

Скуп решења последње неједначине је интервал $(0,3/5)$. Проверавамо да је тај скуп садржан у домену $[-1,1]$. Међутим, примећујемо да полазна неједначина има и других решења – на пример, за $x=0$ она се своди на $1>-1$, а за $x=-1$ на $0>-4$. Дакле, квадрирање није довело до неједначине која је еквивалентна полазној.

(ii) У случају неједначине (ii) квадрирањем се добија

$$(\sqrt{1-x^2})^2 < (3x-1)^2, \quad 10x^2-6x>0, \quad x\in(-\infty,0)\cup(\tfrac{3}{5},+\infty).$$

Како је домен задатка $[-1,1]$, изгледало би да је скуп решења полазне неједначине $[-1,0)\cup(\frac{3}{5},1]$. Међутим, за $x=-1$ неједначина се своди на $0<-4$, што није тачно; за $x=0$ се добија $1<-1$, што такође није тачно. Значи, поново смо квадрирањем добили неједначину која није еквивалентна полазној.

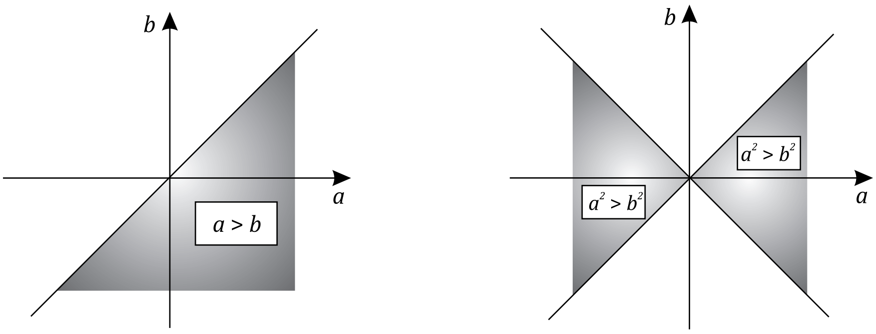
Да бисмо решили ове проблеме, поставићемо питање логичких веза услова:

(а) $a>b$ и $a^2>b^2$; (б) $a<b$ и $a^2<b^2$.

(а) Истинитосни скуп за услов $a>b$ је део aOb равни испод праве $b=a$ (лева слика 1). С друге стране, како је

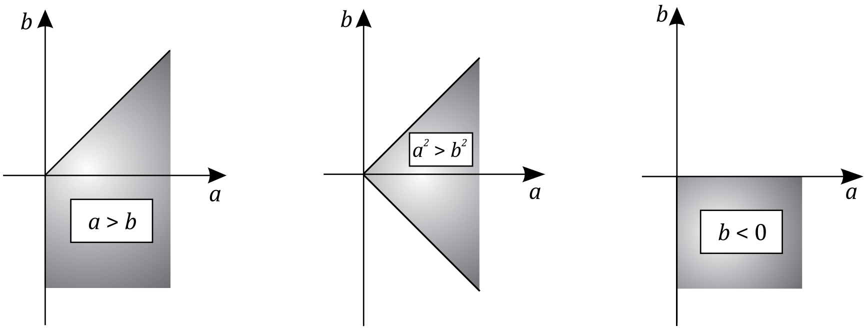
$$\begin{aligned} a^2>b^2 &\iff a^2-b^2>0 \iff (a-b)(a+b)>0 \\ &\iff (a-b>0 \text{ и } a+b>0) \text{ или } (a-b<0 \text{ и } a+b<0), \end{aligned}$$

другом услову одговара скуп на десној слици 1. Видимо да ови услови нису упоредиви.



Слика 1

Чак и ако се овоме дода услов $a \geqslant 0$ (што је испуњено у једначини (i)), одговарајући скупови неће бити једнаки, с тим да ће скуп који одговара услову $a^2 > b^2$, $a \geqslant 0$ бити прави подскуп скупа који одговара услову $a > b$, $a \geqslant 0$ (видети прва два скупа на слици 2).



Слика 2

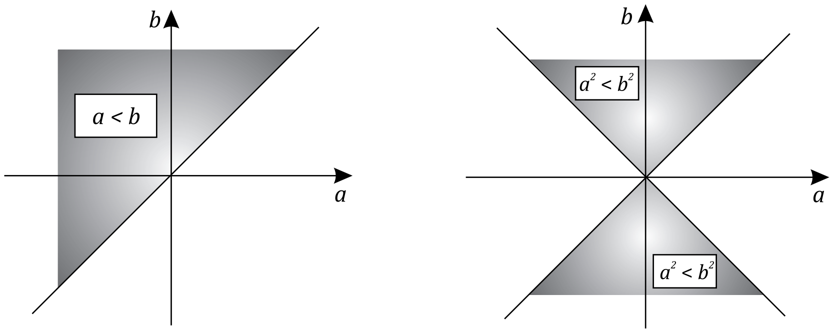
Ако, међутим, формирамо унију скупа за услов $a^2 > b^2$, $a \geqslant 0$ са скупом који одговара услову $b < 0$, $a \geqslant 0$ (десна слика 2), добићемо управо скуп који одговара улсову $a > b$, $a \geqslant 0$. Тако долазимо до следеће еквиваленције

$$(\forall a \geqslant 0)(\forall b \in \mathbf{R})\,(a > b \iff a^2 > b^2 \text{ или } b < 0). \tag{1}$$

Решимо сада задатак 1.(i) (узимајући у претходном $a = \sqrt{1 - x^2}$, $b = 3x - 1$). Домен је $[-1, 1]$. Даље је

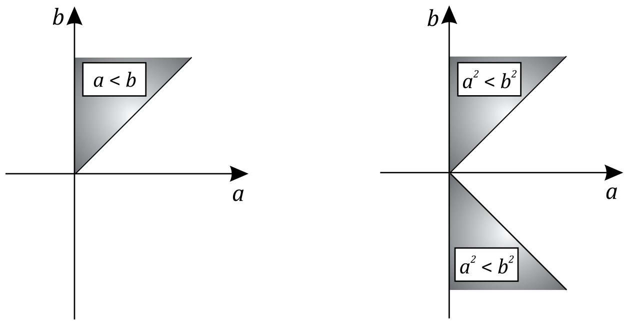
$$\begin{aligned}
\sqrt{1 - x^2} > 3x - 1 &\iff (\sqrt{1 - x^2})^2 > (3x - 1)^2 \text{ или } 3x - 1 < 0 \text{ (према (1))} \\
&\iff 10x^2 - 6x < 0 \text{ или } x < 1/3 \\
&\iff 0 < x < 3/5 \text{ или } x < 1/3 \quad (\text{уз } x \in [-1, 1]) \\
&\iff x \in [-1, 3/5].
\end{aligned}$$

(б) У овом случају скупови који одговарају условима $a < b$ и $a^2 < b^2$ такође су неупоредиви (слика 3).



Слика 3

Али сада, додавањем услова $a \geqslant 0$, добијамо да је скуп који одговара услову $a < b$, $a \geqslant 0$ прави подскуп скупа који одговара услову $a^2 < b^2$, $a \geqslant 0$ (слика 4).



Слика 4

Резонујући слично као малопре и комбинујући с условом $b > 0$, долазимо до еквиваленције

$$(\forall a \geqslant 0)(\forall b \in \mathbf{R})\,(a < b \iff a^2 < b^2 \text{ и } b > 0). \tag{2}$$

Решимо помоћу овога неједначину из задатка 1.(ii). Домен је поново $[-1, 1]$. Даље је

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-x^2} < 3x - 1 &\iff (\sqrt{1-x^2})^2 < (3x-1)^2 \text{ и } 3x - 1 > 0 \text{ (према (2))}\\
&\iff 10x^2 - 6x > 0 \text{ и } x > 1/3 \quad (\text{уз } x \in [-1, 1])\\
&\iff x \in (3/5, 1].
\end{aligned}$$

Ситуација је свакако једноставнија ако се унапред зна да су обе стране неједначине истог (сталног) знака. Наиме, важи:

$$\begin{aligned}
&(\forall a \geqslant 0)(\forall b \geqslant 0)\,(a > b \iff a^2 > b^2),\\
&(\forall a \leqslant 0)(\forall b \leqslant 0)\,(a > b \iff a^2 < b^2).
\end{aligned} \tag{3}$$

Задатак 2. Решити неједначине:

(i) $\sqrt{1-x^2} > |3x-1|$; (ii) $\sqrt{1-x^2} < |3x-1|$.

Домен ових неједначина је и овде $[-1,1]$, па примењујући услов (3), добијамо:

$$\text{(i) } \sqrt{1-x^2} > |3x-1| \iff 1-x^2 > 9x^2-6x+1 \iff x \in (0,3/5),$$
$$\text{(ii) } \sqrt{1-x^2} < |3x-1| \iff 1-x^2 < 9x^2-6x+1 \iff x \in [-1,0) \cup (3/5,1],$$

Задатак 3. Решити неједначине:

$$\text{(i) } \sqrt{x+3} > \sqrt{x} - \sqrt{2-x}, \qquad \text{(ii) } \sqrt{x+3} < \sqrt{x} - \sqrt{2-x},$$
$$\text{(iii) } \sqrt{x+3} > |\sqrt{x} - \sqrt{2-x}|, \qquad \text{(iv) } \sqrt{x+3} < |\sqrt{x} - \sqrt{2-x}|.$$

Домен сваког од датих задатака је $[0,2]$. Неједначине (i) и (ii) би се могле решавати директним квадрирањем, али би се појавио проблем знака десне стране који може бити и позитиван и негативан. Због тога је једноставније посматрати еквиалентне неједначине

$$\text{(i}'\text{) } \sqrt{x+3} + \sqrt{2-x} > \sqrt{x}, \qquad \text{(ii}'\text{) } \sqrt{x+3} + \sqrt{2-x} < \sqrt{x},$$

на које се може применити први од услова (3). После краћег рачуна се добија да је скуп решења неједначине (i) $[0,2]$, а да неједначина (ii) нема решења.

Код неједначина (iii) и (iv) су за $x \in [0,2]$ обе стране ненегативне, па се на њих може директно применити прво правило (3). Скуп решења неједначине (iii) је поново $[0,2]$, а неједначина (iv) нема решења.

Задатак 4. Решити неједначине:

$$\text{(i) } \sqrt{2x^2-3x-5}+1 > x, \qquad \text{(ii) } \sqrt{2x^2-3x-5}+1 < x,$$
$$\text{(iii) } \sqrt{2x^2-3x-5}+1 > -x, \qquad \text{(iv) } \sqrt{2x^2-3x-5}+1 < -x,$$
$$\text{(v) } \sqrt{2x^2-3x-5}+1 > |x|, \qquad \text{(vi) } \sqrt{2x^2-3x-5}+1 < |x|.$$

Домен сваког од датих задатака је $(-\infty,-1] \cup [5/2,+\infty)$.

(i) Применом правила (1) добија се

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2x^2-3x-5}+1 > x \iff \sqrt{2x^2-3x-5} > x-1\\
&\iff 2x^2-3x-5 > (x-1)^2 \text{ или } x-1<0\\
&\iff x^2-x-6>0 \text{ или } x<1\\
&\iff x \in (-\infty,-2) \cup (3,+\infty) \text{ или } x<1\\
&\iff x \in (-\infty,1) \cup (3,+\infty) \quad (\text{уз } x \in (-\infty,-1] \cup [5/2,+\infty))\\
&\iff x \in (-\infty,-1] \cup (3,+\infty).
\end{aligned}$$

(ii) У овом случају може се применити правило (2). Но, може се искористити претходно решење задатка (i). Скуп решења је $[5/2,3)$.

(iii) Сличним поступком као под (i) се добија да је скуп решења $(-\infty, -1) \cup [5/2, +\infty)$.

(iv) Неједначина нема решења.

(v) Користећи резултате задатака (i) и (iii) добија се скуп решења $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

(vi) $[5/2, 3)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Марјановић, *Решавање ирационалних неједначина*, Математичка трибина, св. 19, Архимедес, Београд, 1994.

[2] М. Марјановић, Г. Калајџић, *О релацији еквиваленције*, Настава математике XXXVIII, 1 (1992), 1–7.

[3] М. Марјановић, *Математика за* IV *разред техничке струке: хемијско-металуршке, ауто-саобраћајне и графичке*, Завод за уџбенике и наставна средства Србије, Београд, 1972.

E-mail: marijamajabal@gmail.com