Петар Свирчевић

НЕСТАНДАРДНА КЛАСА НЕЈЕДНАКОСТИ ВЕЗАНИХ ЗА ТРОУГАО

Нека троугао има дужине страница a, b, c; показаћемо да постоји нестандардна класа неједнакости облика $f(a,b,c) \geqslant 0$ за коју важи импликација

$$\big((b+c=a) \vee (c+a=b) \vee (a+b=c)\big) \implies f(a,b,c)=0.$$

Свакако да дужине страница у овим неједнакостима могу бити изражене као функције других трију величина које се односе на троугао, а међусобно су независне. Но, те неједнаксти не морају увек бити у имплицитном облику, већ могу бити и у облику $f_1(a,b,c) \geqslant f_2(a,b,c)$.

Напомена 1. Добро је позната стандардна класа неједнаости $f_1(a,b,c) \geqslant f_2(a,b,c)$ везана за тругао, када важи импликација $(a=b=c) \implies f_1(a,a,a) = f_2(a,a,a)$. Тако, на пример, овај исказ можемо проверити на Ојлеровој неједнакости $\dfrac{r}{R} \leqslant \dfrac{1}{2}$ или на њеој уопштеној верзији $\dfrac{r}{R} \leqslant 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\Big(1-\sin\dfrac{\alpha}{2}\Big)$ (видети [1]). Слично важи у случају неједнакости $a^a b^b c^c \leqslant \left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2s}\right)^{2s}$, где је $2s = a+b+c$, која се добија применом Јенсенове неједнакости (видети [2]).

У овом чланку ћемо најпре извести неједнакости у вези троугла које се доказују помоћу модификоване Херонове формуле за површину троугла, која је изражена у облику

$$P = \frac{1}{4}[(a^2+b^2+c^2)^2 - 2(a^4+b^4+c^4)]^{1/2}. \tag{1}$$

Ова формула се лако добија када се у уобичајеном облику Херонове формуле

$$P = [s(s-a)(s-b)(s-c)]^{1/2}$$

замени $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, па се у формули

$$P = \frac{1}{4}[(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)]^{1/2} \tag{2}$$

добијени поткорени израз трансформише. Облик (1) је практичан за примену, на пример, ако су дужине страница дате као $a=\sqrt{27}$, $b=\sqrt{18}$, $c=\sqrt{11}$.

Површина је функција P, дефинисана на скупу тројки (a,b,c) позитивних реалних бројева за које важи услов $(b+c>a)\wedge(c+a>b)\wedge(a+b>c)$. Другачије речено, троугао постоји ако и само ако је $P>0$, тј из (2) видимо да важи еквиваленција

$$(P>0) \iff ((b+c>a)\wedge(c+a>b)\wedge(a+b>c)). \tag{3}$$

Даље, важи еквиваленција

$$(P=0) \iff ((b+c=a)\vee(c+a=b)\vee(a+b=c)), \tag{4}$$

што описује реалан, али дегенерисан случај када троугао дегенерише у дуж.

Сада ћемо формулисати неједнакости, с решењима или упутствима за њихово доказивање, а односе се на формулу (1). Користићемо притом и наредне формуле:

$$P=\frac{1}{2}\sqrt[3]{(abc)^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma},\quad P=\frac{1}{4}\frac{a^2+b^2+c^2}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma}, \tag{5,6}$$

(7,8)

$$P=\frac{2abc}{a+b+c}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},\quad P=\sqrt{\frac{1}{2}(a+b+c)abc\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}},$$

$$P=s^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{4}(a+b+c)^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}, \tag{9}$$

помоћу којих можемо да генеришемо нове задатке који могу бити и доста сложени за решавање.

Задатак 1. Доказати неједнаост

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geqslant 2(a^4+b^4+c^4), \tag{10}$$

где строга неједнакост важи ако је

$$(b+c>a)\wedge(c+a>b)\wedge(a+b>c), \tag{11}$$

а једнакост за

$$(b+c=a)\vee(c+a=b)\vee(a+b=c).$$

Упутство. Следи из (1), (3) и (4).

Напомена 2. Дакле, у (10) једнакост не важи за $a=b=c$, јер бисмо у том случају дошли до везе $9a^4=6a^4$, а то је контрадикција. Но, ако у (10) уврстимо да је $c=a+b$, тада добијамо да је $(a^2+b^2+(a+b)^2)^2=2(a^4+b^4+(a+b)^4)$, а истинитост тог идентитета можемо лако проверити. Услов конструктибилности троугла је дат релацијом (11), или у облику $a^4+b^4+c^4<2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$, који се добија из (10).

Задатак 2. Ако су t_a,t_b,t_c дужине тежишних линија тругла, доказати да важи

$$(t_a^2+t_b^2+t_c^2)^2 \geqslant 2(t_a^4+t_b^4+t_c^4), \tag{12}$$

где строга неједнакост важи ако и само ако је

$$(t_b + t_c > t_a) \wedge (t_c + t_a > t_b) \wedge (t_a + t_b > t_c),$$

а једнакост ако и само ако је

$$(t_b + t_c = t_a) \vee (t_c + t_a = t_b) \vee (t_a + t_b = t_c).$$

Решење. Докажимо да важи

$$P = \frac{1}{3}[(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2)^2 - 2(t_a^4 + t_b^4 + t_c^4)]^{1/2}, \tag{13}$$

а одатле се одмах види да мора да важи (12).

Да бисмо доказали једнакост (13), подсетимо се да помоћу косинусне теореме можемо лако добити следеће једнакости за квадрате дужина тежишних линија:

$$\begin{gathered} t_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2), \qquad t_b^2 = \frac{1}{4}(2c^2 + 2a^2 - b^2), \\ t_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2). \end{gathered} \tag{14}$$

Из тих релација добијамо да је

$$\begin{gathered} a^2 = \frac{4}{9}(2t_b^2 + 2t_c^2 - t_a^2), \qquad b^2 = \frac{4}{9}(2t_c^2 + 2t_a^2 - t_b^2), \\ c^2 = \frac{4}{9}(2t_a^2 + 2t_b^2 - t_c^2). \end{gathered}$$

Сумирамо ли претходне три једнакости, добијамо да је

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2), \tag{15}$$

а ако исте квадрирамо и саберемо, тада након сређивања следи

$$a^4 + b^4 + c^4 = \frac{16}{9}(t_a^4 + t_b^4 + t_c^4). \tag{16}$$

И коначно, ако последње две једнакости уврстимо у Херонову формулу (1), добијамо једнакост (13), а тиме и неједнакост (12). Притом важе еквиваленције:

$$\begin{gathered} (P > 0) \iff ((t_b + t_c > t_a) \wedge (t_c + t_a > t_b) \wedge (t_a + t_b > t_c)), \\ (P = 0) \iff ((t_b + t_c = t_a) \vee (t_c + t_a = t_b) \vee (t_a + t_b = t_c)), \end{gathered} \tag{17}$$

јер се једнакост (13) може написати у облику

$$P = \frac{1}{3}[(t_a + t_b + t_c)(t_b + t_c - t_a)(t_c + t_a - t_b)(t_a + t_b - t_c)]^{1/2}.$$

Напомена 3. Слично као у напомени 2, јасно је да једнакост у релацији (12) не важи ако је $t_a = t_b = t_c$. Но, узмемо ли, на пример, да је $c = a + b$, па то уврстимо у релације (14), тада ћемо добити да у (12) важи једнакост, јер ће она важити у (17).

Задатак 3. Ако су h_a, h_b, h_c дужине висина троугла, доказати да је

$$(h_a^{-2}+h_b^{-2}+h_c^{-2})^2 \geqslant 2(h_a^{-4}+h_a^{-4}+h_a^{-4}), \tag{18}$$

при чему строга неједнакост важи ако је

$$(h_b^{-1}+h_c^{-1}>h_a^{-1}) \wedge (h_c^{-1}+h_a^{-1}>h_b^{-1}) \wedge (h_a^{-1}+h_b^{-1}>h_c^{-1}), \tag{19}$$

а једнакост за

$$(h_a=0) \vee (h_b=0) \vee (h_c=0). \tag{20}$$

Решење. Из једнакости $P=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$ добијају се везе $a=2Ph_a^{-1}$, $b=2Ph_b^{-1}$, $c=2Ph_c^{-1}$, које, након уврштавања у формулу (1), дају формулу

$$\begin{aligned}(21)\quad P&=\frac{1}{4}[(h_a^{-2}+h_b^{-2}+h_c^{-2})^2-2(h_a^{-4}+h_b^{-4}+h_c^{-4})]^{-1/2}\\ &=[(h_a^{-1}+h_b^{-1}+h_c^{-1})(h_b^{-1}+h_c^{-1}-h_a^{-1})(h_c^{-1}+h_a^{-1}-h_b^{-1})(h_a^{-1}+h_b^{-1}-h_c^{-1})]^{-1/2},\end{aligned}$$

из које следи неједнакост (18), као и услови (19) и (20).

Напомена 4. Ако формално гледамо, тада би еквиваленцији (4) требало да одговара еквиваленција

$$(P=0) \iff ((h_b^{-1}+h_c^{-1}=h_a^{-1}) \vee (h_c^{-1}+h_a^{-1}=h_b^{-1}) \vee (h_a^{-1}+h_b^{-1}=h_c^{-1})),$$

али то није истина, јер би тада из (21) следило да је $P=\infty$, а мора бити $P=0$. Према томе је јасно да дужина неке од висина мора ити једнака нули да би се троугао дегенерисао у дуж, и тада је $P=0$, дакле тачно је (20).

Користећи релације (10), (15) и (16), могу се извести још две неједнакости код којих строга неједнакост важи ус услов као у (3), а једнакост уз услов као у (4).

Задатак 4. $9(a^2+b^2+c^2)^2 \geqslant 32(t_a^4+t_b^4+t_c^4)$.

Задатак 5. $8(t_a^2+t_b^2+t_c^2)^2 \geqslant 9(a^4+b^4+c^4)$.

Задатак 6. $P \geqslant \dfrac{2\sqrt{2(a^4+b^4+c^4)}}{4(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)}$.

Упутство за задатак 6. Следи из (6) и (10).

Задатак 7. $(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)^2 \geqslant 2(\sin^4+\sin^4\beta+\sin^4\gamma)$.

Упутство. Следи применом синусне теореме на релацију (1).

Сада ћемо уопштити задатак 1 на тетивни четвороугао.

Задатак 8. Ако су a, b, c, d дужине страница тетивног четвороугла, доказати да важи неједнакост

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 + 8abcd \geqslant 2(a^4 + b^4 + c^4 + d^4),$$

где строга неједнакост важи ако је

$$(b + c + d > a) \wedge (c + d + a > b) \wedge (d + a + b > c) \wedge (a + b + c > d),$$

а једнакост за

$$(b + c + d = a) \vee (c + d + a = b) \vee (d + a + b = c) \vee (a + b + c = d).$$

Упутство. Формула за површину тетивног четвороугла са страницама дужина a, b, c, d гласи

$$P = \frac{1}{4}[(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 + 8abcd - 2(a^4 + b^4 + c^4 + d^4)]^{1/2},$$

а добија се из $P = [(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)]^{1/2}$, где је $2s = a + b + c + d$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ш. Арсланагић, *Још једно побољшање Ојлерове неједнакости*, Настава математике LXIV, 1–2 (2019), 28–30.

[2] P. Svirčević, *Dvije bitno različite klase nejednakosti vezane za trokut*, Matematičko-fizički list, br. 3 (2017/18).

Техничка школа, Загреб

E-mail: petar.svircevic@zg.t-com.hr