Јенс Карстенсен, Алија Муминагић

ТРИГОНОМЕТРИЈА И ФИБОНАЧИЈЕВИ БРОЈЕВИ

У овом кратком чланку показујемо како се може доћи до Фибоначијевих бројева помоћу формуле за претварање збира тригонометријских функција у производ.

Подсетимо се: бројеви одређени са

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n \geqslant 1, \tag{1}$$

зову се Фибоначијеви[1] бројеви.

С друге стране, када у познату формулу $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, која важи за све α, β, уврстимо $\alpha = \dfrac{(n+1)x}{2}$, $\beta = \dfrac{(n-1)x}{2}$, $n \in \mathbf{N}$, добијамо

$$\sin\frac{(n+1)x}{2} + \sin\frac{(n-1)x}{2} = 2\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{x}{2}, \text{ односно,}$$

$$2\sin\frac{(n+1)x}{2} = 4\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\sin\frac{(n-1)x}{2}. \tag{2}$$

Ако сада означимо $p_n = 2\sin\dfrac{nx}{2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, и $q = 2\cos\dfrac{x}{2}$, имамо да је $p_2 = p_1 q - p_0$, $p_3 = p_2 q - p_1$, и уопште, на основу (2),

$$p_{n+1} = p_n q - p_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \dots. \tag{3}$$

Користећи формулу (3), можемо чланове низа (p_n) редом изразити преко p_1 и q:

$$\begin{aligned}
&p_1 = p_1,\\
&p_2 = p_1 q - p_0 = p_1 q,\\
&p_3 = p_2 q - p_1 = (p_1 q)q - p_1 = p_1(q^2 - 1),\\
&p_4 = p_3 q - p_2 = p_1(q^2-1)q - p_1 q = p_1(q^3 - 2q),\\
&p_5 = p_4 q - p_3 = p_1(q^3 - 2q)q - p_1(q^2 - 1) = p_1(q^4 - 3q^2 + 1),\\
&p_6 = p_5 q - p_4 = p_1(q^4 - 3q^2 + 1)q - p_1(q^3 - 2q) = p_1(q^5 - 4q^3 + 3q),\\
&p_7 = p_6 q - p_5 = p_1(q^5 - 4q^3 + 3q)q - p_1(q^4 - 3q^2 + 1) = p_1(q^6 - 5q^4 + 6q^2 - 1),\\
&\quad \dots
\end{aligned}$$

[1] Leonardo Pisano Fibonacci (1170–1250), познати италијански математичар

Посматрајмо сада изразе $\frac{p_n}{p_1}$ као полиноме по q и, *занемарујући сабирке једнаке нули*, формирајмо следећу таблицу *апсолутних вредности* коефицијената тих полинома.

n / j	0	1	2	3	4	$\sum$
1	1					1
2	1					1
3	1	1				2
4	1	2				3
5	1	3	1			5
6	1	4	3			8
7	1	5	6	1		13
8	1	6	10	4		21

Примећујемо да су збирови коефицијената у свакој врсти таблице једнаки Фибоначијевим бројевима. Прецизније, ако са $B(n,j)$ означимо коефицијент који стоји у n-тој врсти и j-тој колони таблице, важи следећа формула за Фибоначијеве бројеве

$$F_n = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} B(n,j). \tag{4}$$

На пример, $F_7 = B(7,0) + B(7,1) + B(7,2) + B(7,3) = 1 + 5 + 6 + 1 = 13$. Доказ да та формула важи за свако n може се извести индукцијом (видети, на пример, [2]).

Напомена 1. Коришћењем формуле за претварање збира косинуса у производ, може се, слично формули (3), извести рекурентна формула којом се $u_n = 2\cos\frac{nx}{2}$ изражава преко u_{n-1}, u_{n-2} и $q = 2\cos\frac{x}{2}$. Из ње се, затим може добити формула аналогна (4) за тзв. Ликаове[2] бројеве L_n, који се дефинишу помоћу

$$L_1 = 1, \quad L_2 = 3, \quad L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \quad n \geqslant 1$$

(видети такође чланак [2]). Веза између Ликаових и Фибоначијевих бројева је $L_n^2 - 5F_n^2 = 4 \cdot (-1)^n$.

Иначе, сматра се да је формуле типа (3) за $\sin\frac{nx}{2}$ и $\cos\frac{nx}{2}$ први користио Вијет[3].

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Carstensen, *Blandet om Fibonacci-og Lucastal*, Matematik Magasinet **68** (2013).

[2] T. Koshy, *Trigonometric Functions and Fibonacci and Lucas Arrays*, Mathematical Spectrum **42**,3 (2009).

A.M.: Frederiksberg, Danska

E-mail: `fatima.muminagic@gmail.com`

[2] Edouard Lucas (1842–1891), француски математичар

[3] Francois Viète (1540–1603), француски математичар