Мр Белма Алихоџић

ПРИМЕНА КОШИ-БУЊАКОВСКИ-ШВАРЦОВЕ НЕЈЕДНАКОСТИ У РАДУ С НАДАРЕНИМ УЧЕНИЦИМА

Циљ овог чланка јесте да Коши-Буњаковски-Шварцову неједнакост што више приближи, како надареним ученицима, тако и њиховим професорима који се до сада можда нису сусретали с њом у овом облику. Иако ова неједнакост омогућава да се на једноставан и елегантан начин реши велики број задатака, показало се у пракси да врло мало професора средњих школа обрађује ову тему на часовима додатне наставе математике. Надам се да ће чланак о овој неједнакости и њеној широкој примени показати да је оправдано овај садржај изабрати као тему за интензивну обраду с ученицима средње школе који показују већи интерес за математику и учествују на разним математичким такмичењима.

Способности и склоности за математику почињу да се испољавају углавном у старијим разредима основне школе. У нижим разредима основне школе не би се још могло говорити о талентима, већ само о више или мање израженим посебним способностима и склоностима. Идентификација надарених ученика за математику врши се:

- процењивањем особина ученика (наставник, родитељ, водитељи клубова),
- процењивањем духовних и материјалних производа ученика (оригинални радови, практични радови, награде на такмичењима, чланство у научним секцијама и сл).

Рад с надареном децом подразумева посебне програме и активности усклађене с њиховим потребама и потенцијалима.

> *„Мало одлука о образовању које утичу на програм за рад са математички надареним ученицима имају толики значај као што је одлука о избору наставника за овај посао”* (Clark, 1983).

Доказивање неједнакости захтева добро знање из елементарне математике и познавање што већег броја познатих неједнакости, јер у доказу једне неједнакости треба врло често применити више познатих неједнакости.

Многе неједнакости које се појављују на такмичењима из математике разних нивоа могу се често релативно лако доказати применом *Коши-Буњаковски-Шварцове неједнакости* (Cauchy-Buniakowsky-Schwarz inequality, у даљем ћемо је звати CBS неједнакост). Након што је наставник формулише и докаже, може се на примерима показати њена примјена, а затим је способнији и сналажљивији ученици могу и сами примењивати.

Поменута неједнакост гласи

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2),$$

односно

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right),$$

где су $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ две n-торке реалних бројева, са једнакошћу ако и само ако су n-торке a и b пропорционалне, тј. важи $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \cdots = a_n : b_n$.

У чланку [1] је дато шест доказа CBS неједнакости, а они се могу наћи и у осталим радовима из датог списка литературе, па ћемо доказ овде изоставити.

CBS неједнакост игра важну улогу у различитим гранама модерне математике, укључујући функционалну анализу, вероватноћу и статистику, реалну и комплексну анализу, нумеричку анализу, теорију диференцијалних једначина и слично. Овде ћемо се посветити примени те неједнакости у алгебри, геометрији, тригонометрији, једначинама и системима једначина, као и одређивању екстремних вредности у алгебри и геометрији.

1. Примена CBS неједнакости за две или три промењљиве у алгебри

Задатак 1. Нека су x и y реални бројеви, такви да је $4x+5y = 1$. Показати да је тада $x^2 + y^2 \geqslant \dfrac{1}{41}$.

Решење. Помоћу CBS неједнакости за $n = 2$ добијамо

$$1 = (4x + 5y)^2 \leqslant (4^2 + 5^2)(x^2 + y^2) = 41(x^2 + y^2),$$

а одавде $x^2 + y^2 \geqslant \dfrac{1}{41}$. Једнакост важи за $x = \dfrac{4}{41}$ и $y = \dfrac{5}{41}$, што се добија решавањем система једначина $\dfrac{4}{x} = \dfrac{5}{y}$, $4x + 5y = 1$. $\triangle$

Задатак 2. Нека су $a, b, c \in [-1/4, +\infty)$ такви да је $a+b+c = 1$. Доказати да важи неједнакост $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leqslant \sqrt{21}$.

Решење. Помоћу CBS неједнакости добијамо:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \\
&\qquad \leqslant \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{4a+1})^2 + (\sqrt{4b+1})^2 + (\sqrt{4b+1})^2} \\
&\qquad = \sqrt{3} \cdot \sqrt{4a + 4b + 4c + 3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{21}.
\end{aligned}$$

Једнакост важи за $a = b = c = 1/3$. $\triangle$

2. Примена CBS неједнакости у геометрији

Код примене CBS неједнакости у геометрији приступи решењима су различити, а темеље се на многим битним чињеницама из геометрије као што су подударност, сличност, површина троугла, Питагорина теорема, итд.

Задатак 3. Нека су a, b дужине катета, а c дужина хипотенузе правоуглог троугла. Доказати да важи неједнакост $ab + bc + ca < 2c^2$.

Решење. Према CBS неједнакости и чињеници $c^2 = a^2 + b^2$ добијамо

$$(ab+bc+ca)^2 \leqslant (a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+a^2) = (a^2+b^2+c^2)^2 = (c^2+c^2)^2 = (2c^2)^2,$$

одакле следи $ab+bc+ca \leqslant 2c^2$. Приметимо да у претходној неједнакости не може да важи једнакост јер тројке (a, b, c) и (b, c, a) нису пропорционалне. Наиме, када би оне то биле, постојао би неки реалан број m такав да је $a = mb$, $b = mc$ и $c = ma$. Тада бисмо имали

$$c^2 = m^2a^2 = m^2(m^2b^2) = m^4b^2 = m^4(m^2c^2) = m^6c^2,$$

одакле би следило $m = 1$, а онда $c = a$, што би било у контрадикцији са чињеницом да је хипотенуза правоуглог троугла увек дужа од катета. Дакле, важи строга неједнакост $ab + bc + ca < 2c^2$. △

Задатак 4. Нека су a, b, c дужине страница, а t_a, t_b, t_c, редом, дужине одговарајућих тежишница троугла ABC. Доказати да важи неједнакост

$$at_a + bt_b + ct_c \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Решење. Према CBS неједнакости је

$$(at_a + bt_b + ct_c)^2 \leqslant (a^2 + b^2 + c^2)(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2).$$

Како је $t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$, то важи

$$(at_a + bt_b + ct_c)^2 \leqslant \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2),$$

одакле следи тражена неједнакост. Једнакост важи ако и само ако је $\frac{a}{t_a} = \frac{b}{t_b} = \frac{c}{t_c}$, а то је ако и само ако је дати троугао једнакостраничан. △

3. Примена CBS неједнакости у тригонометрији

Задатак 5. Ако су α, β, γ углови троугла ABC, доказати да важи неједнакост

$$\sqrt{\sin\alpha} + \sqrt{\sin\beta} + \sqrt{\sin\gamma} \leqslant 3 \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{4}}.$$

Решење. Користећи CBS неједнакост добијамо

$$(1 \cdot \sqrt{\sin\alpha} + 1 \cdot \sqrt{\sin\beta} + 1 \cdot \sqrt{\sin\gamma})^2$$
$$(1^2 + 1^2 + 1^2)[(\sqrt{\sin\alpha})^2 + (\sqrt{\sin\beta})^2 + (\sqrt{\sin\gamma})^2],$$

односно $(\sqrt{\sin\alpha}+\sqrt{\sin\beta}+\sqrt{\sin\gamma})^2 \leqslant 3(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$, тј.

$$\sqrt{\sin\alpha}+\sqrt{\sin\beta}+\sqrt{\sin\gamma} \leqslant \sqrt{3(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)}.$$

С обзиром да је $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, добијамо

$$\sqrt{\sin\alpha}+\sqrt{\sin\beta}+\sqrt{\sin\gamma} \leqslant \sqrt{3\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}} = 3\cdot\sqrt[4]{\frac{3}{4}}. \quad \triangle$$

Задатак 6. Доказати да за $0<\alpha<\pi/2$ важи неједнакост

$$\Big(1+\frac{1}{\sin\alpha}\Big)\Big(1+\frac{1}{\sin\alpha}\Big) > 5.$$

Решење. Помоћу неједнакости CBS за $n=2$, стављајући да је $a_1=1$, $a_2=\dfrac{1}{\sqrt{\sin\alpha}}$, $b_1=1$, $b_2=\dfrac{1}{\sqrt{\cos\alpha}}$, имамо (због $0<\sin 2\alpha<1$, тј. $\dfrac{1}{\sin 2\alpha}>1$)

$$\begin{aligned}\left(1^2+\left(\frac{1}{\sqrt{\sin\alpha}}\right)^2\right)\left(1^2+\left(\frac{1}{\sqrt{\cos\alpha}}\right)^2\right) &\geqslant \left(1+\frac{1}{\sqrt{\sin\alpha\cos\alpha}}\right)^2\\ =\left(1+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}}\right)^2 &\geqslant \left(1+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)^2 = (1+\sqrt{2})^2>5.\end{aligned}$$

Напомена. Из доказа се види да је број $3+2\sqrt{2}$ минимум датог израза. Једнакост $\Big(1+\dfrac{1}{\sin\alpha}\Big)\Big(1+\dfrac{1}{\sin\alpha}\Big)=3+2\sqrt{2}$ важи за $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$. $\triangle$

4. Примена CBS неједнакости код решавања једначина и система једначина

Овде ћемо показати како се помоћу CBS неједнакости могу успешно решити разне једначине и њихови системи, који би се много теже решавали на неки други начин.

Задатак 7. [Кантонално такмичење за четврти разред, Сарајево, 2010] Наћи сва реална решења система

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=1\\ z^2+t^2&=4\\ xt+yz&\geqslant 2.\end{aligned}$$

Решење. Користећи неједнакост CBS за $n=2$, $a_1=x$, $b_1=t$, $a_2=y$, $b_2=z$ имамо

$$4\leqslant (xt+yz)^2\leqslant (x^2+y^2)(t^2+z^2)=4.$$

Одавде следи да у примењеном случају CBS неједнакости мора да важи једнакост. То ће бити испуњено ако је $\dfrac{x}{t}=\dfrac{y}{z}$, тј. $t=kx$, $z=ky$ за неко $k\in\mathbf{R}$. Сада из једнакости $xt + yz = 2$ добијамо да је $k(x^2 + y^2) = 2$, одакле $k = 2$. Дакле, четворка (x, y, z, t) је решење датог система ако и само ако има облик $(x, y, 2y, 2x)$, при чему је $x^2 + y^2 = 1$. Постоји бесконачно много решења, и она су облика

$$(x, y, z, t) = (\cos\alpha, \sin\alpha, 2\sin\alpha, 2\cos\alpha), \quad \alpha \in [0, 2\pi). \quad \triangle$$

Задатак 8. Наћи сва реална решења система једначина

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 14 \\ x + 2y + 3z &= 14 \end{aligned}$$

Решење. Искористићемо CBS неједнакост за $n = 3$, стављајући $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $b_1 = x$, $b_2 = y$, $b_3 = z$. Добијамо

$$(1) \qquad (1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z)^2 \leqslant (1^2 + 2^2 + 3^2)(x^2 + y^2 + z^2),$$

односно $(x + 2y + 3z)^2 \leqslant 14(x^2 + y^2 + z^2)$, те због услова $x + 2y + 3z = x^2 + y^2 + z^2 = 14$ (који следи из датог система једначина) видимо да у (1) мора да важи једнакост. Дакле, мора бити $\frac{1}{x} = \frac{2}{y} = \frac{3}{z}$, што из услова $x + 2y + 3z = 14$ даје $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, чиме је одређено јединствено решење датог система. $\triangle$

5. Примена CBS неједнакости на решавање алгебарских и геометријских екстремалних проблема

Проблеми одређивања максимума и минимума јављају се у разним применама још од античких времена. И данас су они чести у такмичарским задацима.

Овде ћемо навести два екстремална задатка за чије решење се може искористити CBS неједнакост.

Задатак 9. Нека су x, y и z растојања тачке X унутар датог троугла ABC од правих BC, AC и AB, редом. Наћи положај тачке X за који је сума $x^2 + y^2 + z^2$ минимална.

Решење. Означимо $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Тада је површина P троугла ABC једнака збиру површина троуглова AXB, BXC и CXA, тј. $P = \frac{ax}{2} + \frac{by}{2} + \frac{cz}{2}$, односно $2P = ax + by + cz$. Одатле је, према CBS неједнакости,

$$4P^2 = (ax + by + cz)^2 \leqslant (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2).$$

Дакле,

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \frac{4P^2}{a^2 + b^2 + c^2},$$

при чему се једнакост постиже када је $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. Другим речима, сума $x^2 + y^2 + z^2$ је минимална и износи $\frac{4P^2}{a^2 + b^2 + c^2}$ за тачку X за коју важи претходно наведени услов.

Задатак 10. Одредити највећу и најмању вредност функције $f(x) = x(2009 + \sqrt{2011 - x^2})$ за x из њеног домена.

Решење. Дата функција је дефинисана за $-\sqrt{2011} \leqslant x \leqslant \sqrt{2011}$. Да бисмо одредили максималну вредност, претпоставимо да је $x > 0$. Користећи CBS и AG неједнакост добијамо

$$\begin{aligned} f(x) &= x(\sqrt{2009}\cdot\sqrt{2009} + 1\cdot\sqrt{2011 - x^2}) \leqslant x(\sqrt{2010}\sqrt{2009 + 2011 - x^2}) \\ &\leqslant \sqrt{2010}\,\frac{x^2 + 4020 - x^2}{2} = 2010\sqrt{2010}. \end{aligned}$$

Једнакост важи за $x = \sqrt{2010}$.

Дакле, $\max f(x) = 2010\sqrt{2010}$ и $\min f(x) = -2010\sqrt{2010}$. $\triangle$

ЛИТЕРАТУРА

[1] B. Alihodžić, *Nejednakosti u nastavi matematike za nadarene učenike: Koši-Bunjakovski-Švarcova nejednakost*, izd. B. Alihodžić, Sarajevo, 2013.

[2] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

[3] O. Bottema, R. Ž. Đorđević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publ., Groningen, 1969.

[4] D. S. Mitrinović, *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1970.

[5] Е. Г. Моисеев, *Задача М.1150*, Квант **7** (1989), стр. 34.

Prva bošnjačka gimnazija, Sarajevo

E-mail: `balihodzic@gmail.com`