др Милош Миловановић

p-АДСКИ БРОЈЕВИ У НАСТАВИ НУМЕРИЧКЕ МАТЕМАТИКЕ

Нумеричка математика је предмет који је присутан у програмима бројних факултета и високих школа, а јавља се и у наставном плану четвртог разреда математичких гимназија. Његов садржај се пре свега односи на проблематику реалне анализе, којој су додирни теорија оптимизације и инжењерске примене. Појам p-адског броја остаје међутим углавном непозналица за целокупни систем образовања, уз ретке изузетке постдипломских курсева који само потврђују правило. Овакво стање представља изразиту несразмеру с појмом реалног броја који се од раног узраста намеће у својству универзалног језика. Чини се да није по среди само незнање и неупућеност који по том питању без сумње преовладавају међу наставницима математике и творцима наставних програма. Ради се пре свега о уверењу како такви садржаји ничему не би допринели или би чак нанели штету образовном систему. Притом остају скрајнуте и по том питању нерасветљене знатне примене p-адике, међу којима су рачун бројева у потпуном комплементу или покретном зарезу.

У овом кратком раду наставу нумеричке математике посматрамо као примерени оквир за увођење и разраду p-адске анализе. Предложена методологија с тим у вези тиче се математичких спектара које је установио и развио Михаило Петровић [7]. Премда спектрална метода није доживела свој пуни процват, што је чини у приличној мери запостављеном теоријом, она поседује фундаменталну вредност када је реч о филозофији математике и њеном заснивању [1]. Теорија спектара је дакле битна и у том погледу, премда се чланак ограничава на нумерички значај p-адике.

Математички спектри

Спектрална метода је оцењена као врло оштроуман начин аритметизације разноврсних проблема, чак и по цену великог броја операција практично неизводљивих у доба када рачунари још нису били развијени [2]. Михаило Петровић је уводи по аналогији са светлосним спектрима у физици или физичкој хемији [9]. Појам спектра је у том погледу присутан још код Њутна означавајући слику добијену разлагањем светлости. Разрада тог појма у хармонији и музици употпунила је њихово значење доводећи га у везу са диференцијалним једначинама и теоријом оператора, што важи и за математичке спектре Михаила Петровића који се могу излагати на тај начин. Ефикасност методе илуструје пример из алгебре који се тиче факторизације у прстену полинома са целобројним коефицијентима [1].

Нека су дати полиноми $P_1(x) = 46x^2 - 54x + 18$ и $P_2(x) = 26x^2 + 21x - 23$. Њима додељујемо спектре равномерног ритма 4 који гласе $S_1 = P_1(10^4) = 45\,|\,9946\,|\,0048$ и $S_2 = P_2(10^4) = 26\,|\,0020\,|\,9977$. Ритам је одређен тако да четвороцифрене пруге спектра одговарају појединим коефицијентима полинома, што се битно усложњава у случају негативних коефицијената који су представљени на нарочити начин. Њихова репрезентација у многоме подсећа на рачун бројева у потпуном комплементу, што ће бити размотрено у одељку о p-адици.

Спектар полинома који одговара производу $P = P_1 \cdot P_2$, такав да важи $S = P(10^4)$, добија се множењем ових спектара

$$S = S_1 \cdot S_2 = 1195\,|\,9561\,|\,9056\,|\,2249\,|\,8896.$$

Њему одговара полином $P(x) = 1196x^2 - 438x^3 - 944x^2 + 2250x - 1104$. Метода је такође применљива на растављање полинома, одређивање највећег заједничког делиоца и најмањег заједничког садржаоца, сводећи алгебру полинома на чисту аритметику. Поступак најпре подразумева изналажење одговарајућег спектра који је својим ритмом кадар да обухвати, како поставку проблема, тако и његово решење.

За аналитичке функције које представљају уопштење полинома, Михаило Петровић предлаже спектре у виду реалних бројева који се добијају низањем коефицијената степеног реда иза децималног зареза. У овом раду, међутим, сматрамо посве примереним њихово приказивање p-адским бројевима који су установљени аналогно развоју аналитичких функција у степени ред облика $f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^3 + \cdots$.

p-адски бројеви

Спектрална метода је применљива на све проблеме између чијих се непознатих и степеног реда с целобројним коефицијентима може успоставити кореспонденција. Благодарећи произвољности те кореспонденције, на њих се наилази у свим гранама рачуна, од аритметике, алгебре и теорије вероватноће до инфинитезималног рачуна и теорије функција [7]. Њихови спектри су представљиви p-адским бројевима облика $a = a_0 + a_1p + a_2p^2 + \cdots$, где је p цео број. За разлику од реалних бројева који се нижу у недоглед десно од децималне тачке, p-адика подразумева недогледно низање улево. Обично се поставља додатни захтев да је p нерастављив, јер у таквом прстену нема делитеља нуле, што значи да се успешно проширује до поља [9]. Но то овде није од нарочитог значаја, па је допуштено да p буде степен десетице, што је углавном случај када је о математичким спектрима реч.

Предност p-адике у нумеричкој математици је сасвим очигледна. Рачунање се наиме увек спроводи здесна улево, што значи да га је у запису реалног броја дословно немогуће отпочети. p-адски бројеви се међутим управо нижу у одговарајућем смеру, чиме по природи ствари прате ритам израчунавања. Њихова појава је махом текла упоредо с реалним бројевима. Обе настају у XIX веку, имајући дугу праисторију која сеже бар до XVII века. Зачетником реалних бројева се сматра Рене Декарт који је образовао бројевну праву аналогну правој у геометрији. Појам је коначно установио Рихард Дедекинд чији пресеци представљају реалне бројеве [3].

С друге стране, зачеци p-адике се препознају у делу *Arithmetica infinitorum* енглеског математичара Џона Валиса и у радовима Леонарда Ојлера који су се бавили регуларизацијом дивергентних редова и израчунавањем њихових сума [10]. Рани радови Ернста Кумера такође имплицитно садрже њихову употребу. Коначна формулација се ипак приписује Курту Хенселу који их је сматрао редовима $a = \sum_{i \geqslant j} a_i p^i$ што конвергирају у норми $|a| = p^{-\|a\|}$, где валуација $\|a\| = j$ означава најмању вредност i такву да важи $a_i \neq 0$ [5]. На тај начин је број приказан у виду $a = b \times p^j$, што је мултирезолуциони запис који се назива *покретни зарез*. Ово p-адику чини широко примењивом у физици, биологији и осталим областима којима су својствене хијерархијске структуре [4].

Кључна црта p-адских бројева представља одсуство линеарног уређења које се у случају реалних сматра дефиниционим својством. Они према томе не одговарају тачкама праве успостављене геометријом распореда која подразумева тотални поредак. Насупрот томе, p-адика образује мултирезолуциону хијерархију која одговара традиционалном поимању времена и историчности [6]. Ова разлика се упадљиво испољава при p-адском записивању негативних бројева које не изискује додатну ознаку $-$, неопходну у случају реалних. Метода која се примењује у том погледу прожима теоретске основе рачунарства где је позната под називом *потпуни комплемент*. Наиме, опозит p-адског броја $a = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots$ се добија по правилу $-a = 1 + \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 p + \tilde{a}_2 p^2 + \cdots$, при чему $\tilde{a}_i = p - a_i$ представља комплемент одговарајуће цифре. Сабирањем се увиђа да тако установљена вредност задовољава услов $-a + a = 0$. p-адика сходно томе прожима нумеричка израчунавања, испостављајући се доследном разрадом рачунских метода у спрези с математичким спектрима који представљају методологију њиховог увођења.

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Миловановић, *Значај Петровићевих спектара у заснивању математике*, Михаило Петровић Алас: поводом сто педесет година од рођења, Београд, 2-3. октобар 2018, САНУ, Београд 2019, 47–62.

[2] Е. Стипанић, *Михаило Петровић, математичар и феноменолог*, у: Д. С. Митриновић (ур), *Михаило Петровић: човек, филозоф, математичар*, Завод за уџбенике, Београд, 1968.

[3] R. Dedekind, *Essays in the Theory of Numbers. I Continuity and irrational numbers; II The nature and meaning of numbers*, The Open Court Publishing Company, Chicago, 1901.

[4] B. Dragovich, A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, I. V. Volovich, *On p-adic mathematical physics*, p-adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications **1** (1) (2019), 1–17.

[5] K. Hensel, *Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **6** (3) (1897), 83–88.

[6] M. Milovanović, *Traditional History in Terms of Complex Systems*, 6th Conference on Information Theory and Complex Systems – TINKOS 2018, Belgrade, June 18-19, 2018, 1-2.

[7] M. Petrovitch, *Les spectres numériques*, Gauthier-Villars, Paris, 1919.

[8] M. Petrovitch, *Leçons sur les spectres mathématiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

[9] A. Rich, *Leftist numbers*, The College Mathematics Journal **39** (5) (2008), 330–336.

[10] J. Wallis, *Arithmetica infinitorum*, Typis Leon, Lichfield Academiae typographi, London, 1656.

Математички институт САНУ

E-mail: milosm@mi.sanu.ac.rs