Др Шефкет Арсланагић, мр Даниела Зубовић

О ЈЕДНОЈ КЛАСИ ТРОУГЛОВА

Специјална врста троуглова и аритметичка прогресија

У овом чланку је реч о једној специјалној врсти троуглова чије дужине страница образују аритметичку прогресију, тј. за њихове странице a, b, c важи једнакост

$$a + c = 2b. \tag{1}$$

Доказаћемо неколико интересантних особина таквих троуглова.

Особина 1. Важи једнакост $h_b = 3r$, где је h_b висина троугла из врха B, а r радијус уписане кружнице тог троугла.

Доказ. Због (1) имамо да за полуобим s троугла важи

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3}{2}b, \tag{2}$$

а из $P = \dfrac{1}{2}bh_b = rs$ следи да је

$$h_b = \frac{2P}{b} = \frac{2rs}{\frac{2}{3}s} = 3r,$$

што је и требало доказати.

Особина 2. Симетрала угла код врха B је нормална на дуж која спаја центре уписане и описане кружнице троугла.

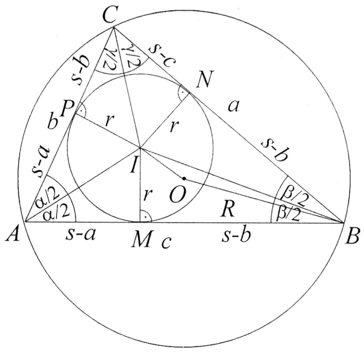
Доказ. Довољно је проверити да важи једнакост

$$|BO|^2 = |BI|^2 + |IO|^2, \tag{3}$$

где је тачка I центар уписане кружнице, а тачка O центар описане кружнице троугла ABC.

Из познате Ојлерове формуле за растојање центара уписане и описане кружнице троугла имамо $|IO|^2 = R^2 - 2Rr$, па је за (3) довољно доказати да је $|BI|^2 = 2Rr$. Из правоуглих трогулова BIM и BIN (сл. 1) добијамо да је

$$|BI|^2 = \frac{r}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{s-b}{\cos\frac{\beta}{2}},$$



Слика 1

а одавде

$$|BI|^2 = \frac{r(s-b)}{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{2r(s-b)}{\sin\beta}.$$

Како је за дату класу троуглова $s-b=\dfrac{b}{2}$, следи да је $|BI|^2=\dfrac{rb}{\sin\beta}$. На основу синусне теореме је $\dfrac{b}{\sin\beta}=2R$, па следи $|BI|^2=2Rr$, што је и требало доказати.

Особина 3. Важи једнакост $ac=6Rr$.

Доказ. Из једнакости (2) и познатих формула за површину троугла $P=\dfrac{abc}{4R}$ и $P=rs$, добијамо:

$$\frac{abc}{4R}=rs=\frac{3}{2}br,$$

одакле је $ac=6Rr$, што је и требало доказати.

Особина 4. Важи једнакост $(s-a)(s-c)=3r^2$.

Доказ. Из Херонове формуле за површину троугла $P^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$ добијамо

$$(s-a)(s-c)=\frac{P^2}{s(s-b)}.$$

Пошто је $s=\dfrac{3}{2}b$, дакле $s-b=\dfrac{1}{3}s$, то је

$$(s-a)(s-c)=\frac{r^2s^2}{s\cdot\frac{1}{3}s}=3r^2,$$

што је и требало доказати.

Особина 5. Важи једнакост $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{1}{3}$.

Доказ. Са слике 1 видимо да је $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{r}{s-a}$ и $\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{r}{s-c}$, па одатле, користећи особину 4 добијамо да је

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{r^2}{(s-a)(s-c)}=\frac{r^2}{3r^2}=\frac{1}{3},$$

што је и требало доказати.

Особина 6. Важи једнакост $r_b=h_b$, где је r_b радијус приписане кружнице троугла ABC.

Доказ. Како је $h_b = 3r$ (особина 1), и $r_b = s\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{rs}{s-b}$ (доказ ове једнакости се може наћи у [3], с. 68), односно $s-b = \dfrac{1}{3}s$, имамо

$$r_b = \frac{rs}{\frac{1}{3}s} = 3r.$$

Дакле, важи $h_b = r_b$ $(= 3r)$, што је и требало доказати.

Доказује се да важе и следеће особине.

Особина 7. Важи једнакост $R = 2r + \dfrac{(c-a)^2}{8r}$.

Због $\dfrac{(c-a)^2}{8r} \geqslant 0$, из горње једнакости следи позната Ојлерова неједнакост:

$$R \geqslant 2r,$$

где једнакост важи ако и само ако је $a = b = c$, тј. за једнакостранични троугао.

Особина 8. Центар уписане кружнице I, тежиште T и Нагелова[1] тачка N леже на једној правој која је паралелна страници AC троугла. (Нагелова тачка је тачка пресека правих које пролазе кроз темена троугла и тачке додира наспрамних страница и спођа приписаних кружница.)

Особина 9. Теме B троугла, средишта C_1 и A_1 страница AB и BC тог троугла, и тачке I и O припадају једној кружници.

Особина 10. Ако су d_a и d_c растојања од центра описане кружнице до страница BC и AB троугла ABC који је оштроугли, тада је $d_a + d_c = 2r$. Како гласи ово тврђење ако је у питању тупоугли троугао?

Неке од ових особина су и довољни услови да дужине страница троугла образују аритметичку прогресију. На пример, из сваке од особина 1–5. следи једнакост $2b = a + c$. Та једнакост следи и из особине 6. за оштроугли троугао, као и из услова да се око четвороугла A_1BC_1I може описати кружница.

Сва ова тврђења се лако проверавају те препоручујемо читаоцима да то ураде.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
[2] A. Marić, *Trokut*, Element, Zagreb, 2007.
[3] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.

E-mail: asefket@pmf.unsa.ba

[1] A. Nagel (1821–1903), немачки математичар и геодета