Др Милан Живановић

НЕСТАНДАРДНИ ЗАДАЦИ НА ТЕМУ ОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ

Под нестандардним задацима се подразумевају они који било својом формулацијом или методом решавања не спадају у уобичајене задатке за увежбавање и проверу знања редовних школских садржаја. За њихово решавање је осим доброг познавања математичке теорије потребна довитљивост у уочавању скривене везе између проблема и оног што је ученику познато. Стога је овакав тип задатака подесан за развијање стваралачког мишљења кроз налажење, на први поглед, тих невидљивих веза имеђу различитих математичких дисциплина и предмета истраживања.

И у овако широком спектру задатака могуће је извршити неки вид класификације према природи проблема или примени преовлађујућих кључних метода решавања. У нестандардним задацима на тему одређени интеграл у средњој школи по кључној методи решавања можемо издвојити: методу смене променљивих, коришћење симетрије граница интеграције, коришћење особина подинтегралне функције, особине правила интегрирања. Веома често је потребно користити и комбинације наведених поступака. У наредном тексту илустроваћемо ове методе помоћу одговарајућих примера.

1. $I = \displaystyle\int_5^7 \frac{\sqrt{\ln(7-x)}}{\sqrt{\ln(7-x)} + \sqrt{\ln(x-5)}}\,dx.$

Сложеност израза којим је задата подинтегрална функција одређује овај проблем у задатке нестандардног типа. У овом случају уводимо смену $y = 12 - x$. Тада је: $7 - x = y - 5$, $x - 5 = 7 - y$ и $dx = -dy$. Границе интеграције за нову променљиву само замене места. Добијамо:

$$\begin{aligned} I &= \int_7^5 \frac{\sqrt{\ln(y-5)}\,(-dy)}{\sqrt{\ln(y-5)} + \sqrt{\ln(7-y)}} = \int_5^7 \frac{\sqrt{\ln(y-5)}\,dy}{\sqrt{\ln(7-y)} + \sqrt{\ln(y-5)}} \\ &= \int_5^7 \frac{\sqrt{\ln(x-5)}\,dx}{\sqrt{\ln(7-x)} + \sqrt{\ln(x-5)}}. \end{aligned}$$

Кад саберемо полазни и последњи интеграл имамо да је

$$2I = \int_5^7 \frac{\sqrt{\ln(7-x)} + \sqrt{\ln(x-5)}}{\sqrt{\ln(7-x)} + \sqrt{\ln(x-5)}}\,dx = \int_5^7 dx = 2.$$

Најзад, добијамо да је $I = 1$.

2. $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(\sin x + 2020x)\,dx.$

Сменом $y = x - \pi$ полазни интеграл се своди на

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\sin(y+\pi) + 2020(y+\pi))\,dy = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(-\sin y + 2020y + 2020\pi)\,dy$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(-\sin y + 2020y)\,dy.$$

Искористили смо формулу за свођење на први квадрант и периодичност функције синус. Сада уочимо подинтегралну функцију $f(y) = \sin(-\sin y + 2020y)$ и одредимо $f(-y) = \sin(-\sin(-y) + 2020(-y)) = \sin(-(-\sin y + 2020y)) = -f(y)$. Закључујемо да је подинтегрална функција непарна, па је њен интеграл на интервалу симетричном у односу на координатни почетак једнак 0. Дакле, $I = 0$.

3. $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} \ln\Big(\sqrt{x^{2n} + x^{2n-2} + \cdots + 1} + x\sqrt{x^{2n-2} + x^{2n-4} + \cdots + 1}\Big)\,dx,$ $n \in \mathbf{N}$.

Означимо подинтегралну функцију са $f(x) = \ln\Big(\sqrt{x^{2n} + x^{2n-2} + \cdots + 1} + x\sqrt{x^{2n-2} + x^{2n-4} + \cdots + 1}\Big)$. Тада је

$$f(-x) = \ln\Big(\sqrt{x^{2n} + x^{2n-2} + \cdots + 1} - x\sqrt{x^{2n-2} + x^{2n-4} + \cdots + 1}\Big).$$

Израчунајмо збир

$$\begin{aligned}
&f(x) + f(-x)\\
&= \ln\Big[\Big(\sqrt{x^{2n} + x^{2n-2} + \cdots + 1} + x\sqrt{x^{2n-2} + x^{2n-4} + \cdots + 1}\Big) \times\\
&\quad \Big(\sqrt{x^{2n} + x^{2n-2} + \cdots + 1} - x\sqrt{x^{2n-2} + x^{2n-4} + \cdots + 1}\Big)\Big]\\
&= \ln\big(x^{2n} + x^{2n-2} + \cdots + 1 - x^2(x^{2n-2} + x^{2n-4} + \cdots + 1)\big) = \ln 1 = 0,
\end{aligned}$$

па је $f(x) = -f(-x)$ за $x \in [-1, 1]$. Значи да је подинтегрална функција непарна, па је дати интеграл једнак 0.

4. $I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^{17} + x^7 + x + 1}{\cos^2 x}\,dx.$

Прво ћемо интервал интеграције поделити на два симетрична интервала у односу на тачку 0. Дакле,

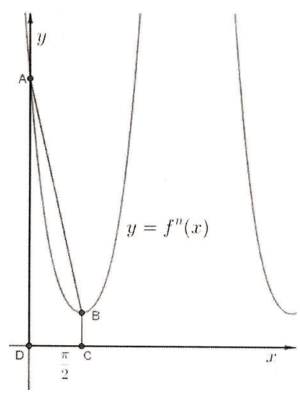
$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{x^{17} + x^7 + x + 1}{\cos^2 x}\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^{17} + x^7 + x + 1}{\cos^2 x}\,dx.$$

Затим у првом интегралу уведемо смену $x = -y$, на основу чега добијамо

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{-y^{17} - y^7 - y + 1}{\cos^2(-y)} \, (-dy) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^{17} + x^7 + x + 1}{\cos^2 x} \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-y^{17} - y^7 - y + 1}{\cos^2 y} \, dy + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^{17} + x^7 + x + 1}{\cos^2 x} \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-x^{17} - x^7 - x + 1}{\cos^2 x} \, dy + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^{17} + x^7 + x + 1}{\cos^2 x} \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{\cos^2 x} = 2 \operatorname{tg} x \Big|_0^{\pi/4} = 2. \end{aligned}$$

5. Доказати да за свако природно n важи неједнакост

$$\int_0^{\pi/2} (2 - \sin x)^n \, dx < \frac{\pi}{4}(2^n + 1).$$



Слика 1

Посматрајмо функцију $f(x) = 2 - \sin x$. Она је на интервалу $[0, \pi/2]$ непрекидна, диференцијабилна и позитивна. Такође је $f''(x)$ позитивна на посматраном интервалу. То значи да је на том интервалу функција $f(x)$ конвексна. Математичком индукцијом докажимо и да је функција $f^n(x)$ такође конвексна на датом интервалу за свако природно n. Претпоставимо да то важи за све природне бројеве мање од n. Тада је

$$\begin{aligned} (f^n(x))'' &= (nf^{n-1}(x) \cdot f'(x))' \\ &= n(n-1)f^{n-2}(x)(f'(x))^2 + nf^{n-1}(x)f''(x) > 0. \end{aligned}$$

Такође приметимо да график функције $f^n(x)$ садржи тачке $A(0, 2^n)$ и $B(\pi/2, 1)$, а пошто је она конвексна, тај график се на интервалу $[0, \pi/2]$ налази испод дужи AB.

Због тога је и површина одговарајућег криволинијског трапеза (дакле, интеграл који посматрамо) мања од површине трапеза $ABCD$ (слика 1). Површина тог трапеза је

$$P_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2}\cdot CD = \frac{2^n+1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}(2^n+1).$$

Тиме је дата неједнакост доказана.

6. Израчунати $L = \lim\limits_{n\to\infty} L_n$ ако је

$$L_n = \ln\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{\frac{\operatorname{arctg} n}{2n}} + \ln\Big(\frac{n}{n+2}\Big)^{\frac{\operatorname{arctg} n}{2n}} + \cdots + \ln\Big(\frac{n}{2n}\Big)^{\frac{\operatorname{arctg} n}{2n}}.$$

Израз чија се граница тражи можемо трансформисати на следећи начин:

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{\operatorname{arctg} n}{2n}\Big(\ln\frac{n}{n+1} + \ln\frac{n}{n+2} + \cdots + \ln\frac{n}{2n}\Big)\\ &= \frac{\operatorname{arctg} n}{n}\Big(\ln\sqrt{\frac{n}{n+1}} + \ln\sqrt{\frac{n}{n+2}} + \cdots + \ln\sqrt{\frac{n}{2n}}\Big)\\ &= \operatorname{arctg} n\cdot\frac{1}{n}\bigg(\ln\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} + \ln\sqrt{\frac{1}{1+\frac{2}{n}}} + \cdots + \ln\sqrt{\frac{1}{1+\frac{n}{n}}}\bigg). \end{aligned}$$

Приметимо да израз $\frac{1}{n}\bigg(\ln\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} + \ln\sqrt{\frac{1}{1+\frac{2}{n}}} + \cdots + \ln\sqrt{\frac{1}{1+\frac{n}{n}}}\bigg)$ представља Риманову интегралну суму функције $f(x) = \ln\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ на интервалу $[0,1]$. Дакле,

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\bigg(\ln\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} + \ln\sqrt{\frac{1}{1+\frac{2}{n}}} + \cdots + \ln\sqrt{\frac{1}{1+\frac{n}{n}}}\bigg)\\ &\qquad = \int_0^1 \ln\frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx = \frac{1}{2}(1-2\ln 2). \end{aligned}$$

Интеграл је израчунат парцијалном интеграцијом ($u = \ln\frac{1}{\sqrt{1+x}}$, $dv = dx$). С друге стране је $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{arctg} n = \frac{\pi}{2}$. Закључујемо да је $L = \frac{\pi}{4}(1-2\ln 2)$.

Задаци за вежбање

1. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{e^{\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}}{e^{\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)} + e^{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}}\,dx.$

2. $\displaystyle\int_a^b \frac{f(x-a)}{f(x-a)+f(b-x)}\,dx$, f непрекидна.

3. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2+1}{e^x+1}\,dx.$

4. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}.$

5. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \operatorname{arctg} x^2 \cdot \ln(x + \sqrt{x^2+1})\, dx.$ 6. $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{x^2+1} \operatorname{arctg} \frac{x^2+1}{x}\, dx.$

7. Доказати да за сваки природан број n важи неједнакост

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x - \cos x)^n\, dx < \frac{\pi}{4} e^{\frac{\pi}{2}}.$$

8. $\displaystyle\int_{\pi}^{3\pi} \frac{\sqrt{16 - 4\pi^2 + 4\pi x - x^2}}{4\pi^2 + 1 - 4\pi x + x^2} \sin 2x\, dx.$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Э. Шехов, ***Интегралы и ряды – нестандартные задачи***, Издательство НИПКиПРО, Новосибирск, 2017.

Висока школа за васпитаче, Крушевац

E-mail: `mzivanovic@vaspks.edu.rs`