ИЗ ИСТОРИЈЕ МАТЕМАТИКЕ

Др Павле Миличић

НЕКЕ ЦРТИЦЕ О НЕПРЕКИДНОСТИ ПРЕСЛИКАВАЊА

Осим појма функције (једнозначног пресликавања са подскупа од $\mathbf{R}$ у $\mathbf{R}$), неоспорно, појам граничне вредности (лимеса) функције је основни појам реалне математичке анализе (МА), па и анализе у метричким просторима. Помоћу тог појма дефинисани су остали фундаментални појмови МА као што су бесконачно мала величина, бесконачно велика величина, непрекидност функције (пресликавања), извод функције, интеграл итд. Иако је идеја о граничној вредности постојала још од античког времена, прву модерну формулацију појма граничне вредности функције дао је италијански математичар Болцано (B. Bolzano, 1781–1848) у радовима из 1816. и 1817. год, али су ти радови постали шире познати тек након његове смрти. Коши (A. L. Cauchy, 1789–1857) први је решио да заснује МА на појму границе (лимеса). Пре њега је Волис (J. Wallis, 1616–1703) покушао да то учини у спису „Аритметика бесконачно малих" 1655. год. Такође је Даламбер (J. R. D'Alemberet, 1717–1783) у чланку „Граница", писаном за Енциклопедију 1751–1766. год. покушавао да постави основе МА. Њутнов учитељ Исак Бароу (I. Barrow, 1630–1677) је 1670. год. поставио проблем дефинисања тангенте криве у тачки, па се појавио проблем дефинисања извода у тачки.

Коначно, Коши је 1829. год. у својој књизи „Курс алгебарске анализе" дао основе МА: појмове функције, границе, непрекидности, извода и интеграла. Међутим, он је дао само вербалну дефиницију лимеса, док се формална дефиниција граничне вредности у „епсилон-делта" форми обично приписује Вајерштрасу (K. Weierstrass, 1815–1897). Вајерштрасови радови које је приказао на Берлинском универзитету у времену 1859–1860. год. у потпуности су посвећени фундирању МА. Он је ослободио основе МА зависности од кретања, интуитивних предрасуда и геометријских очигледности који су били присутни у дотадашњим покушајима да се поставе основе МА. Данашњу формалну дефиницију непрекидности функције у тачки такође је дао Вајерштрас у другој половини 19. века. До њега су постојале само интуитивне представе о непрекидности криве (крива која се може нацртати једним потезом оловке, без подизања оловке са папира) и о изводу функције у тачки (као тангенсу угла кога тангента у тој тачки гради са x-осом).

Сама чињеница да је тачна дефиниција појма граничне вредности формулисана тек у 19. веку (а из те дефиниције су проистекли најважнији појмови савремене

МА) говори о тешкоћама које су пратиле фундирање и стварање МА, без обзира што су је стварали највећи светски математичари као што су Декарт, Ферма, Паскал, Хајгенс, Волис, Њутн, Лајбниц, Ојлер, Лагранж и други. Велике тешкоће су пратиле дефинисања појмова бесконачно малих, бесконачно великих, непрекидности функције у тачки и извода функције у тачки. Узајамни однос појмова диференцијабилности и непрекидности није био потпуно јасан ни тако великим математичарима као што је Коши.

Један од главних узрока тих тешкоћа је било непостојање тачне дефиниције реалних бројева. Интуиције није недостајало у стварању МА, али су недостајале комплетне представе о пољу реалних бројева. Потреба за овим представама сеже далеко у прошлост, трагове налазимо још у Ахмесовом папирусу из 18. века п.н.е. С поколења на поколење се преносила та потреба тако да код старих Грка имамо извесну теорију реалних бројева, Еудоксову теорију. Али праву теорију реалних бројева добијамо тек крајем 19. века у радовима Вајерштраса, Дедекинда (R. Dedenkid, 1831–1916) и Кантора (G. Kantor, 1845–1918). Пре тога, у 17. и 18. веку, горе поменути појмови МА су базирани на знању Еуклидске геометрије и интуицији. Ипак, и без темељних знања, МА се и тада развијала. Формулисана су без доказа разна тврђења – касније се испоставило да су многа од њих тачна, мада је било и више нетачних. Нарочито је било много нетачности у вези дефиниција већ помињаних појмова који су у основама МА. Проблем непрекидности функције у тачки се посебно истицао. Великани МА, Ојлер, Лагранж, па и Коши имали су доста нетачних тврђења о том појму.

Ојлер је у стварању МА одбацио геометрију а своје закључке о функцијама и бесконачно малим изводио је алгебарски. Код њега однос бесконачно малих p и q, (p/q) којим се дефинише извод функције у тачки, прелази у неодређеност $0/0$. Он је сматрао да $0/0$ може да има разна значења јер „из $n \cdot 0 = 0$ произлази да је $n = 0/0$“. Ни Њутн ни Лајбниц нису били имуни од не малих заблуда у својим закључивањима. Лагранж је веровао да се може избећи појам границе те да се МА може фундирати помоћу алгебре. Коши је најстрожије, за то доба, истакао главна својства функција, граничних вредности, непрекидности, извода и интеграла. Али и у његовим теоремама постоје нетачности. Иако је написао три уџбеника (1821, 1823, 1829), често је игнорисао строгост у доказима својих тврђења. Мада је дао дефиницију непрекидности функције, Коши за неку функцију коју посматра никад не претпоставља њену непрекидност. Штавише, као и многи његови претходници и савременици, он је веровао да из непрекидности функције у тачки следи њена диференцијабилност у тој тачки.

До почетка 19. века већини великих математичара тог времена није био потпуно јасан појам непрекидности пресликавања. А биле су велике потребе да се он користи. Геометријска интуиција је замењивала строгост. Због тога је био на снази тзв. Принцип непрекидности пресликавања. По њему би требало да свака фигура при непрекидном пресликавању одржава сва своја првобитна својства, што у општем случају није коректно. Оснивач Пројективне геометрије, француски математичар Понселе (V. Poncelet, 1788–1867) добијао је идеје за неке своје закључке користећи тај принцип. С друге стране, Лајбниц је формулисао принцип непрекидности функције у тачки на следећи начин: „Ако непрекидна функција има одређене особине на својој области дефинисаности, онда њена гранична вредност има исте особине“.

Наводимо још једно погрешно тврђење у вези непрекидности прелсикавања, исказано од стране једног од највећих математичара тог времена.

Када је било актуелно тачно дефинисати појам непрекидне криве линије у простору, француски математичар Жордан (M. E. C. Jordan, 1838–1922) дао је једну дефиницију тог појма која је у почетку била прихваћена од његових савременика математичара, али која није била коректна. Наиме, он је сматрао да је непрекидна крива у простору непрекидна слика једног сегмента (дужи) из $\mathbf{R}$. Али, после извесног времена италијански математичар Пеано (G. Peano, 1858–1932) задивио је математички свет. Он је конструисао непрекидно пресликавање одређеног сегмента из $\mathbf{R}$ у $\mathbf{R}^2$ тако да је слика тог сегмента цео квадрат. Дакле, Жорданова дефиниција је била погрешна.

О стању МА у 19. веку најбоље говори сећање Бертранда Расела (B. Russell, 1872–1970) који је студирао на Тринити колеџу Кембричког универзитета 1890–1894. Он у својој књизи „Моје филозофско образовање“ каже: „Они који су мени предавали Диференцијални рачун нису знали правилне доказе основних теорема“.

Вајерштрасови радови о основама МА у потпуности су ослободили математичаре од разних заблуда које су током стварања МА биле присутне код многих. Ослободили су их од кретања, од разних интуитивних предрасуда и геометријских очигледности. Њему је било суђено да заврши фундирање МА. Било му је јасно да диференцијабилност не следи из непрекидности. И он је 1872. год. задивио математички свет када је на Берлинској академији приказао функцију која је непрекидна у свакој својој тачки али није диференцијабилна ни у једној тачки своје области дефинисаности. Француски математичар Емил Пикар (E. Picard, 1856–1941) прокоментарисао је овај Вајерштрасов резултат речима: „Да су Њутн и Лајбниц знали да из непрекидности функције у тачки не следи диференцијабилност у тој тачки, диференцијални рачун не би ни оформили“.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Математическая энциклопедия* 1–5, Главны редактор И. М. Виноградов, Москва, 1977.
2. E. T. Bell, *Veliki matematičari*, Znanje, Zagreb, 1972.
3. М. Клаин, *Математика – утрата определенности*, Мир, Москва, 1984.
4. W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, New York, 1964.
5. J. Dieudonné, *Foundation of Modern Analysis*, Academic Press, New York, 1960.
6. L. Chambadal, *Dictionnaire des mathématiques moderne*, Librairie Larousse, Paris, 1975.

Математички факултет, Београд
E-mail: pavle.milicic@gmail.com