Петар Свирчевић

МНОЖЕЊА НАПАМЕТ МОГУ ГЕНЕРИСАТИ ИНТЕРЕС ЗА МАТЕМАТИКУ

У овом чланку се износе нека углавном лична искуства о томе како ученике мотивисати да продуктивније савладавају градиво из математике. Наиме, често се дешавало да ученици на каснијим часовима математике, у истом радном дану, осећају умор а тиме и смањени интерес за математику. Идеја водиља, да се то избегне, била је да се „шокирају“ неким згодним задацима, али тако да им се учини да су „паметнији и бржи“ од калкулатора. Дакле, они треба да стекну утисак да могу израчунати и такве производе и збирове чије вредности не могу бити приказане на дисплеју калкулатора у целобројној променљивој. У тој ситуацији је калкулатору једино преостало да резултат назначених операција прикаже у „floating point“ променљивој, но онда је то у општем случају приближна вредност. Јасно је да је циљ свега тога да се код ученика пробуди интерес и постигне већа активност у настави математике и у практичној примени.

Уводне напомене

Морамо у почетку дати неке напомене како се наслов чланка не би чинио претенциозним. Наиме, малу таблицу множења користимо вербално (речима) и визуелно (записано), заправо ради се о аутоматизму. Она је основа математике и сувишно је о томе уопште расправљати. Међутим, ако нам неко постави вербално питање „колико је $88649 \cdot 125$?“, тада ћемо у овоме раду обрадити методу којом можемо дати одговор – и вербални и визуелни – да је вредност овога производа 11081125. Даље, на визуелно питање о вредности нпр. производа

$$6\,416\,328\,096\,329\,617 \cdot 625,$$

бићемо у стању да одговоримо и вербално и визуелно, да је то

$$4\,010\,205\,060\,205\,010\,625,$$

премда тај производ није могуће тачно израчунати помоћу данашњих „научних“ калкулатора. Додуше, неки људи имају способност да на овакво визуелно питање његову вредност могу и само вербално исказати. Све те могућности, вербалног и визуелног, исказа подразумеваћемо као *рачунање напамет*, па тиме оправдавамо наслов чланака.

1. Велика таблица множења

Сувишно је говорити о малој таблици множења која се обрађује у другом разреду основне школе, када учимо да међусобно множимо бројеве од 0 до 9. Међутим, ако треба међусобно множити све двоцифрене бројеве, тада за те операције морамо да дамо алгоритам. Можда није коректно да кажемо да се ту ради о множењу напамет, већ се ту заправо ради о брзом испису производа. Но, није искључено да неки појединци, који имају велику способност визуализације, долазе до резултата и напамет.

Пре него што пређемо на исказивање алгоритма за множење двоцифрених бројева напамет морамо да дефинишемо функцију која реалном броју x придружује највећи цели број мањи или једнак од x, а називамо је *функција највеће цело* или *функција под* (енг. *floor*) и означавамо је $\lfloor\cdot\rfloor\colon \mathbf{R}\to\mathbf{Z}$.

Дакле, нека су $(ba)_{10}$, $(BA)_{10}$ двоцифрени бројеви, где су a и A цифре јединица, док су b и B цифре десетица, тј.

$$(ba)_{10} = 10b + a, \qquad (BA)_{10} = 10B + A.$$

Производ тих двоцифрених бројева је

$$(ba)_{10}(BA)_{10} = 100bB + 10(bA + aB) + aA. \tag{1}$$

Будући да је највећи производ двоцифрених бројева $99\cdot 99 = 9\,801$, закључујемо да тај производ у општем случају има цифре јединица, десетица, стотина и хиљада. Из реченог следи да је производ (1) највише четвороцифрени број, дакле

$$(ba)_{10}(BA)_{10} = (\delta\gamma\beta\alpha)_{10}.$$

Треба да одредимо цифре $\alpha,\beta,\gamma,\delta$. Троцифрене бројеве можемо сматрати да су то четвероцифрени бројеви чија је цифра хиљада 0, па ћемо то некипут и формално користити.

Јасно је да aA у општем случају није цифра јединица производа, јер aA максимално може бити $9\cdot 9 = 81$, дакле може садржавати и десетице. На основу тога закључујемо да је цифра јединица

$$\alpha = aA - 10\Big\lfloor \frac{aA}{10}\Big\rfloor,$$

према томе релација (1) добија облик

$$(ba)_{10}(BA)_{10} = 100bB + 10\Big(\Big\lfloor \frac{aA}{10}\Big\rfloor + (bA + aB)\Big) + 1\Big(aA - 10\Big\lfloor \frac{aA}{10}\Big\rfloor\Big).$$

Даље, видимо да је укупнан број десетица $\Big\lfloor \frac{aA}{10}\Big\rfloor + (bA + aB)$, али то не значи да је то и цифра десетица траженог производа, јер их можда има више од 9. По аналогији одређивања цифре јединица, јасно је да је

$$\Big(\Big\lfloor \frac{aA}{10}\Big\rfloor + (bA + aB)\Big) - 10\Big\lfloor\Big(\Big\lfloor \frac{aA}{10}\Big\rfloor + (bA + aB)\Big)/10\Big\rfloor$$

цифра десетица производа двоцифрених бројева. По томе принципу одређујемо и цифру стотина, с тим да сада стотина може бити и више од 9, а то значи да идемо у подручје хиљада.

Задаци. Ако је $(ba)_{10}(BA)_{10} = (\delta\gamma\beta\alpha)_{10}$, проверити да је:
а) $93 \cdot 75 = 6975$, б) $97 \cdot 89 = 8633$, в) $23 \cdot 21 = 0483$, г) $15 \cdot 34 = 0510$.

Решење. а) $(3 \cdot 5 = 15 > 9) \implies (\alpha = 5$ и $1)$; даље, $(1 + 9 \cdot 5 + 3 \cdot 7 = 67 > 9) \implies (\beta = 7$ и $6)$; даље, $(6 + 9 \cdot 7 = 69 > 9) \implies (\gamma = 9$ и $\delta = 6)$; тврђење је тачно.

б) $(7 \cdot 9 = 63 > 9) \implies (\alpha = 3$ и $6)$; даље, $(6 + 9 \cdot 9 + 7 \cdot 8 = 143 > 9) \implies (\beta = 3$ и $14)$; даље, $(14 + 9 \cdot 8 = 86 > 9) \implies (\gamma = 6$ и $\delta = 8)$; тврђење је тачно.

в) $(3 \cdot 1 = 3 \leqslant 9) \implies (\alpha = 3$ и $0)$; даље, $(0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 08 \leqslant 9) \implies (\beta = 8$ и $0)$; даље, $(0 + 2 \cdot 2 = 04 \leqslant 9) \implies (\gamma = 4$ и $\delta = 0)$; тврђење је тачно.

г) $(5 \cdot 4 = 20 > 9) \implies (\alpha = 0$ и $2)$; даље, $(2 + 1 \cdot 4 + 5 \cdot 3 = 21 > 9) \implies (\beta = 1$ и $2)$; даље, $(2 + 1 \cdot 3 = 05 \leqslant 9) \implies (g = 5$ и $\delta = 0)$; тврђење је тачно.

Сувишно је наглашавати да наведени алгоритам користимо и за међусобно множење двају децималних бројева с две узастопне значајне цифре, нпр: $9{,}3 \cdot 7{,}5 = 69{,}75$; $0{,}097 \cdot 89 = 8{,}633$; $0{,}23 \cdot 0{,}0021 = 0{,}000483$.

2. Множење двоцифреног броја бројем 11

Нећемо се позивати на приступ (1) и његово уопштење. Најпре наведимо неке специјалне случајеве. Тако нпр. имамо:

$$27 \cdot 11 = 2\underbrace{9}_{2+7}7, \qquad 53 \cdot 11 = 5\underbrace{8}_{5+3}3, \ldots$$

Јасно нам је да је производ ових двоцифрених бројева и броја 11 троцифрени број, који има крајње цифре (стотина и јединица) респективно цифре тога броја, а цифра десетица је збир цифара датог броја. Једноставно је извођење овога правила, али напоменимо, да збир цифара задатог броја мора бити мањи од 10. У строгој математичкој форми, ако је $a, b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ и $a + b < 10$, уз уважавање канонског приказа двоцифреног броја у облику $(ab)_{10} = 10a + b$, наслућени алгоритам би гласио

$$(ab)_{10} \cdot 11 = (a(a + b)b)_{10}, \quad a + b < 10, \tag{2}$$

где је приказан троцифрени број у облику

$$(a(a + b)b)_{10} = a \cdot 100 + (a + b) \cdot 10 + b.$$

Сада ћемо анализирати случај када је

$$a + b \in \{10, 11, \ldots, 18\}. \tag{3}$$

Ако посматрамо производе:

$$39 \cdot 11 = \underbrace{4}_{3+1=4;}\ \underbrace{2}_{3+9=12}\ 9 = 429, \quad 78 \cdot 11 = \underbrace{8}_{7+1=8;}\ \underbrace{5}_{7+8=15}\ 8 = 858, \ldots,$$

тада видимо да тај троцифрени број има цифру јединица као и задати број, а цифра десетица је збир цифара задатог броја умањена за 10 и, коначно, цифра стотина је цифра десетица датог броја увећана за 1. Сада ћемо дати општи запис поступка множења двоцифреног броја с 11 уз услов (3). Дакле, ако важи (3), тада је

$$(ab)_{10} \cdot 11 = (a+1) \cdot 100 + (a+b-10) \cdot 10 + b,$$

или у скраћеном запису

$$(ab)_{10} \cdot 11 = ((a+1)(a+b-10)b)_{10}. \tag{4}$$

Напомена 1. Можемо да синтетизујемо једнакости (2) и (4) у једну формулу, премда тај облик није погодан за рачунање напамет. Дакле, у општем случају је

$$(ab)_{10} \cdot 11 = (10a+b) \cdot 11 = (pqb)_{10} = p \cdot 100 + q \cdot 10 + b,$$

где је

$$p = a + \frac{1 + \operatorname{sgn}[(a+b) - 10]}{2},$$
$$q = (a+b)\frac{1 - \operatorname{sgn}[(a+b) - 10]}{2} + [(a+b) - 10]\frac{1 + \operatorname{sgn}[(a+b) - 10]}{2}.$$

Помоћу претходних формула се лако проверава да је нпр. $27 \cdot 11 = 297$ и $78 \cdot 11 = 858$, што смо на почетку већ констатовали.

3. Квадрирање броја $\underbrace{11\ldots1}_{1\leqslant n\leqslant 9}$

Напамет налазимо да је $1^2 = 1$; $11^2 = 121$; $111^2 = 12\,321$; $1\,111^2 = 1\,234\,321$; $11\,111^2 = 123\,454\,321$; $111\,111^2 = 12\,345\,654\,321$; $1\,111\,111^2 = 1\,234\,567\,654\,321$; $11\,111\,111^2 = 123\,456\,787\,654\,321$; $111\,111\,111^2 = 12\,345\,678\,987\,654\,321$.

Из наведеног следи, да је нпр. $1{,}111^2 = 1{,}234321$, $\sqrt{1\,234\,567{,}654\,321} = 1\,111{,}111$, итд. Ако напишемо да је $11\,111{,}111\,1^2 = 123\,456\,789{,}87$, тада можемо рећи да смо квадрат наведеног децималног броја израчунали тачно на две децимале.

4. Множење природног броја с 5

Подсетимо се да смо још у основној школи уочили да је природни број лакше делити с 2 него множити с 5, користећи да је

$$n \cdot 5 = \frac{n}{2} \cdot 10, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Одатле следи, кратко речено, да ако је број паран, тада количнику $n/2$ треба дописати цифру 0 као цифру јединица, а ако је непаран, тада том количнику дописујемо цифру 5 као цифру јединица. Нпр. $1\,946 \cdot 5 = 9\,730$; $64{,}91 \cdot 5 = 324{,}55$.

5. Множење природног броја бројем 25

Задајмо најпре нпр. да се помоћу калкулатора провери тачност производа $124 \cdot 25 = 3100$. Ученици активирају калкулаторе и проверавају написани резултат. Затим можемо записати да је $1\,946 \cdot 25 = 48\,650$. И то они лако проверавају, али је видљиво да се буди интерес. Сада им кажемо да помоћу калкулатора провере множење $448\,122\,436\,648\,832 \cdot 25 = 11\,203\,060\,916\,220\,800$. Е, ово их већ мало шокира, јер они на калкулатору добијају да тај производ има вредност $1.120\,306\,091\,622\,08 \cdot 10^{16}$, па им је прва помисао да је вредност приближна, премда је уствари тачна, али је дата у *floating point* запису. Напомињемо да тачност резултата могу директно и проверити. Међутим, сада наводимо производ који је потпуно изван домена и *scientific* калкулатора; нпр.

$$19\,061\,946\,260\,719\,483\,695 \cdot 25 = 476\,548\,656\,517\,987\,092\,375.$$

Дакле, ту смо помножили двадесетоцифрени број бројем 25 и добили смо број који има двадесетједну цифру. И коначно напомињемо да лако можемо било како велики број тачно множити с 25. Тада се међу ученицима појављује жеља да сазнају тајну тога брзог множења.

Ако испишемо једнакост, боље рећи идентитет,

$$n \cdot 25 = \frac{n}{4} \cdot 100, \quad n \in \mathbf{N}, \tag{5}$$

тада је одмах јасно да важи следеће правило: „Природни број дељив са 4 множимо с 25 тако што тај број поделимо са 4 и допишемо још две нуле, заправо множимо са 100“. Но, шта се ради у оним случајевима када број n није дељив са 4? Видимо да из (5), на пример, следи: $17 \cdot 25 = 4{,}25 \cdot 100 = 425$, $18 \cdot 25 = 4{,}50 \cdot 100 = 450$, $19 \cdot 25 = 4{,}75 \cdot 100 = 475$. На основу тога можемо исказано правило прецизирати: „Природни број множимо с 25 тако да тај број подијелимо с 4 и ако је дељив тим бројем, тада количнику допишемо две нуле; ако при дељењу са 4 даје остатак 1, тада допишемо 25; ако при дељењу са 4 даје остатак 2, тада допишемо 50 и ако при дељењу са 4 даје остатак 3, тада дописујемо 75“. Свакако, да би се ово правило могло прецизније изрећи, али би било доста гломазније. И коначно ученицима је јасно да „напамет“ могу природни број множити с 25, али је потребно знати тачно тај број делити са 4.

Рецимо и то да се могу поставити и проблеми како се природни број може брзо множити са: 250, 2 500, ... , 2,5, 0,25, 0,025, ... Лако се може доћи до поступка за ове случајеве.

Напомена 2. Да се наставник с овим операцијама, иако су елементарне, не би превише замарао, згодно је да групе цифра, које чине број по деловима од једне или по две цифре буду дељиве са 4. Тако брзо и без погрешке имамо да је нпр. $416\,483\,241\,220\,888 \cdot 25 = 10\,412\,081\,030\,522\,200$. Још бисмо могли додати, уважавајући ово правило, да лагано можемо и број од нпр. 100 или више цифара множити с 25.

Напомена 3. И коначно, сада можемо дати и строги математички исказ правила о множењу природног броја бројем 25, које гласи:

$$n \cdot 25 = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \cdot 100 + 25 \cdot p_4,$$

ако је $n \in \mathbf{N}$ и $n \equiv p_4 \pmod 4$ где је $p_4 \in \{0, 1, 2, 3\}$.

6. Множење природног броја бројем 125

Кажемо ли ученицима да помоћу калкулатора провере да је нпр.

$$483\,224\,406\,416\,888\,565\,632\,324\,056 \cdot 125 = 60\,403\,050\,802\,111\,070\,704\,040\,507\,000, \tag{6}$$

биће у проблену јер се овај производ не може добити ни помоћу *scientific* калкулатора, а ми га можемо добити скоро напамет. Јасно је да се ово множење базира на идентитету

$$n \cdot 125 = \frac{n}{8} \cdot 1000, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{7}$$

Видимо да смо у (6) фактор од 25 цифара конструисали тако да по две цифре у њему формирају број дељив с 8, због тога до резулта долазимо брзо и без замарања.

Ако применимо (7), тада добијамо нпр:

$$\begin{aligned}
32 \cdot 125 &= \frac{32}{8} \cdot 1\,000 = 4\,000, & 33 \cdot 125 &= \frac{33}{8} \cdot 1000 = 4\,125,\\
34 \cdot 125 &= \frac{34}{8} \cdot 1000 = 4\,250, & 35 \cdot 125 &= \frac{35}{8} \cdot 1000 = 4\,375,\\
36 \cdot 125 &= \frac{36}{8} \cdot 1000 = 4\,500, & 37 \cdot 125 &= \frac{37}{8} \cdot 1000 = 4\,625,\\
38 \cdot 125 &= \frac{38}{8} \cdot 1000 = 4\,750, & 39 \cdot 125 &= \frac{39}{8} \cdot 1000 = 4\,875.
\end{aligned}$$

Колоквијално речено, видимо да ако је број дељив с 8, тада дописујемо 000; ако је остатак при дељењу 1, тада дописујемо 125 (то је $1 \cdot 125$); ако је остатак при дељењу 2, тада дописујемо 250 (то је $2 \cdot 125$); ..., ако је остатак при дељењу 7, тада дописујемо 875 (то је $7 \cdot 125$).

На основу реченог сада можемо лако наћи да је нпр. $77\,315\,719\,243 \cdot 125 = 9\,664\,464\,905\,375$.

Напомена 5. Ученицима се могу поставити и проблеми како се природни број може брзо множити са: 1 250, 12 500, ..., 12,5, 1,25, 0,125, ...

Напомена 6. Јасно је да строги математички исказ поступка множења природног броја бројем 125 гласи:

$$n \cdot 125 = \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor \cdot 1000 + 125 \cdot p_8, \tag{8}$$

где је $n \in \mathbf{N}$ и $n \equiv p_8 \pmod 8$, $p_8 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$, који ће у потпуности бити јасан ученицима ако су с пажњом пратили претходно излагање.

7. Множење природног броја бројем 5^k

На основу претходних разматрања закључујемо да строги математички исказ правила о множењу природног броја n бројем 5^k гласи:

$$n \cdot 5^k = \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor \cdot 10^k + 5^k \cdot p_{2^k}, \tag{9}$$

ако је $k, n \in \mathbf{N}$ и $n \equiv p_{2^k} \pmod{2^k}$ и $p_{2^k} \in \{0,1,2,3,\dots,2^k-1\}$.

Специјално, за $k = 4$, имамо правило за множење природног броја с 625, које гласи:

$$n \cdot 625 = \left\lfloor \frac{n}{16} \right\rfloor \cdot 10^4 + 625 \cdot p_{16}, \tag{10}$$

ако је $n \in \mathbf{N}$ и $n \equiv p_{16} \pmod{16}$ и $p_{16} \in \{0,1,2,3,\dots,15\}$.

Видимо да множење напамет с 625 и није превише једноставно, јер морамо извршити дељење природног броја бројем 16, те остатак дељења множити с 625. Лако је нпр. видети да је $17 \cdot 625 = 10\,625$, али би требало мало више концентрације да се напамет добије да је $283 \cdot 625 = 176\,875$. Међутим, да не би ученици „задремали“, можемо им дати да калкулатором провере тачност производа $324\,864 \cdot 625 = 203\,040\,000$. Но, и без калкулатора ће им сада бити јасно да је

$$6\,416\,328\,096\,329\,617 \cdot 625 = 4\,010\,205\,060\,205\,010\,625,$$

где смо применили правило (10), а сем тога смо одабрали да групе од по две узастопне цифре чине број дељив са 16.

Најзад, сада је јасно да је: $32 \cdot 3\,125 = 100\,000$, $649\,633 \cdot 3\,125 = 2\,030\,103\,125$, ..., јер све то следи ако применимо (9), где је $p_{32} \in \{0,1,2,3,\dots,31\}$.

8. Множење децималног броја бројем 5^k

Ученици ће се изненадити ако им испишемо производ

$$16\,644\,809\,616\,321\,606\,496{,}16048 \cdot 625 = 10\,403\,006\,010\,201\,004\,060\,100{,}3$$

јер је ту калкулатор за тачну вредност потпуно немоћан, а сем тога се појављује и децимални број. Но, брзо ће схватити да до овог резултата могу доћи применом правила (10).

Сада ћемо извести генерализацију правила (9), али тако да се оно може применити и на децималне бројеве с коначно много децимала. Дакле, нека је дат децимални број који се састоји од укупно $p+q$ декадних цифара, али тако да је број целобројних цифара p а q је број децималних цифара, па га приказујемо у облику

$$d_{p,q} = a_p a_{p-1} \dots a_2 a_1{,}b_1 b_2 \dots b_{q-1} b_q,$$

дакле у конкретном канонском запису то значи да је

$$d_{p,q} = 10^{p-1}a_p + \cdots + 10^1 a_2 + 10^0 a_1 + 10^{-1} b_1 + 10^{-2} b_2 + \cdots + 10^{-q} b_q.$$

Одавде следи да је $10^q d_{p,q} \in \mathbf{N}$, па ако сада применимо правило (9), добијамо да је производ тога броја и броја 5^k дат везом

$$10^q d_{p,q} \cdot 5^k = \left\lfloor \frac{10^q d_{p,q}}{2^k} \right\rfloor \cdot 10^k + 5^k \cdot p_{2^k},$$

а одатле следи поступак за производ децималног броја $d_{p,q}$ и броја 5^k који је одређен везом

$$d_{p,q} \cdot 5^k = 10^{-q} \left(\left\lfloor \frac{10^q d_{p,q}}{2^k} \right\rfloor \cdot 10^k + 5^k \cdot p_{2^k} \right), \tag{11}$$

за $k \in \mathbf{N}$ и $10^q d_{p,q} \equiv p_{2^k} \pmod{2^k}$, где је $p_{2^k} \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^k - 1\}$.

Задатак 2. Применом прваила (11) израчунати производ $246{,}3157 \cdot 25$.

Решење. $246{,}3157 \cdot 25 = 10^{-4} \left(\left\lfloor \dfrac{2463157}{4} \right\rfloor \cdot 10^2 + 25 \cdot p_4 \right) = \cdots = 6157{,}8925$, где је $2463157 \equiv p_4 \pmod 4$, па је $p_4 = 1$. Дакле и овај производ смо лако израчунали, а сам резултат можемо проверити и помоћу калкулатора.

9. Квадрирање природних бројева којима је цифра јединица 5

Ако посматрамо производе: $15^2 = 225$, $25^2 = 625$, $35^2 = 1\,225$, $45^2 = 2\,025$, $55^2 = 3\,025$, $65^2 = 4\,225$, $75^2 = 5\,625$, $85^2 = 7\,225$, $95^2 = 9\,025$, тада наслућујемо да се квадрирање двоцифреног броја којем је цифра јединица 5 врши тако да се цифра десетица помножи бројем увећаним за један и томе производу се допише 25. Строги исказ овог тврђења би гласио

$$(10n + 5)^2 = n(n + 1) \cdot 100 + 25, \quad n \in \mathbf{N}, \tag{12}$$

дакле то правило важи и за вишецифрене бројеве којима је цифра јединица 5. Тако бисмо добили да је нпр: $115^2 = 13\,225$, $215^2 = 46\,225$, … , а то значи да би било сувишно да то правило анализирамо у канонском облику $(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10 + 5)^2$.

Ако применимо (8) и (12) за израчунавање нпр. 1255^2, добијамо као резултат $1\,575\,025$, јер смо искористили да је $126 \cdot 125 = 15\,750$ и дописали смо 25. Даље, можемо рачунати и с декадним вишекратницима и децималним бројевима, нпр: $125\,500^2 = 15\,750\,250000$, $1{,}255^2 = 1{,}575\,025$, итд.

10. Израунавање напамет неких коначних збирова

Већина ученика се још у основној школи упознаје с начином на који је Гаус израчунао збир

$$1 + 2 + \cdots + 99 + 100 = 5\,050.$$

У средњој школи се обрађује општији резултат

$$1+2+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}, \quad n\in\mathbf{N}. \tag{13}$$

Користећи формулу (13) можемо ученицима задати да напамет провере тачност, на пример, збира

$$1+2+\cdots+2\,000\,000=2\,000\,001\,000\,000,$$

а они ће бити изненађени једноставношћу поступка.

Даље, обрађујући аритметички низ лако долазимо до суме

$$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2. \tag{14}$$

Сада је занимљиво да, ако применимо резултат $1255^2=1\,575\,025$, који смо добили користећи формулу (8), онда на основу формуле (14) добијамо напамет да је $1+3+5+7+\cdots+2\,509=1255^2=1\,575\,025$.

Ако применимо идентитет $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$, који се изводи још у основној школи, добијамо да је

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}, \quad n\in\mathbf{N}. \tag{15}$$

Ако ученицима задамо да „пешке“ (без калкулатора) израчунају, односно провере, збир

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}=0{,}9,$$

неће баш бити одушевљени, али ако им напоменемо да важи формула (15), тада ће им постати све јасно, јер су свесни да би стандардном процедуром имали доста посла. Даље, у вези овог збира можемо напоменути да је

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{999\,999\cdot 1\,000\,000}=0{,}999\,999.$$

И коначно, ако се ово презентује ученицима старијих разреда средње школе, тада је њима потпуно јасно, да је $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$, што следи из (15), јер је $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

Даље, везано за брзо сумирање, могло би се поставити питање како брзо сумирати нпр. $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}$, $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}, \ldots$ Но, ту нема те могућности, јер се може доказати да не постоји експлицитна формула за суму коначног хармонијског реда $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$. Рецимо и то, да бесконачни хармонијски ред $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ споро дивергира, тако да је нпр. $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10^{43}}<100$.

Сада ћемо навести један занимљиви количник, који се једноставно израчунава, а може послужити за увежбавање основних рачунских оперција, које наставник може лако контролисати. Наиме, важи следећи идентитет

$$\frac{1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n+1}n^2}{1-3+5-\cdots+(-1)^{n+1}(2n-1)}=\frac{n+1}{2}, \quad n\in\mathbf{N}, \tag{16}$$

којег смо добили дељењем ова два идентитета: $1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n+1}n^2=(-1)^{n+1}\dfrac{n(n+1)}{2}$ и $1-3+5-\cdots+(-1)^{n+1}(2n-1)=(-1)^{n+1}n$ (детаљније о још општијим облицима у чланку [1]). Тако из (16) добијамо: $\dfrac{1^2}{1}=\dfrac{1+1}{2}=1$, $\dfrac{1^2-2^2}{1-3}=\dfrac{2+1}{2}=1{,}5$, $\dfrac{1^2-2^2+3^2}{1-3+5}=\dfrac{3+1}{2}=2$, $\dots$ А сада посматрајмо једну специјалну класу ових количника која се лако памти и рачуна напамет:

$$\frac{1^2-2^2+3^2-\cdots+99^2}{1-3+5-\cdots+197}=\frac{99+1}{2}=50,$$
$$\frac{1^2-2^2+3^2-\cdots+999\,999^2}{1-3+5-\cdots+1\,999\,997}=\frac{999\,999+1}{2}=500\,000,$$
$$\cdots$$
$$\frac{1^2-2^2+3^2-\cdots+\underbrace{99\dots9}_{k}{}^2}{1-3+5-\cdots+1\underbrace{99\dots9}_{k-1}7}=\frac{\underbrace{99\dots9}_{k}+1}{2}=5\cdot10^{k-1},\quad k\in\mathbf{N}.$$

Закључак о елементарној вештини усменог рачунања

Дошло је време тоталне компјутеризације, па су калкулатори инсталирани и у мобилне телефоне, тако да више не треба трошити време за основне опреације с бројевима. И употреба логаритамских таблица је углавном избачена из школских програма. Из свега тога следи да се и вештина рачунања с конкретним бројевима смањила, тако се дешава да се неки ученици машају калкулатора за најелементарније рачунске операције. Због тога, овим чланком смо покушали да мало оживимо интерес за вештину рачунања. Но, још је важније да треба неговати способност грубе процене исхода рачунских операција, које се примењују у свакодневној пракси упркос благодатима данашњих могућности рачунске обраде података свих врста.

ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Svirčević, *Formule rekurzije za alternativne sume potencija prirodnih brojeva*, Matematičko-fizički list 3/259, 2014/2015, Zagreb.

[2] P. Svirčević, *Množenje prirodnog i decimalnog broja napamet potencijom broja pet koja ima prirodni eksponent*, MAT-KOL, XXV (4), 215–221, Banja Luka, 2019.

Tehnička škola, Zagreb

E-mail: petar.svircevic@zg.t-com.hr