НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

Алија Муминагић

НЕКИ ГЕОМЕТРИЈСКИ ДОКАЗИ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ НЕЈЕДНАКОСТИ

У чланку [1] показани су примери неких тригонометријских једнакости које се могу доказати геометријским путем. У овом чланку дајемо доказе неких тригонометријских неједнакости геометријским путем.

Задатак 1. *Доказати да у троуглу ABC с унутрашњим угловима α, β и γ важи неједнакост*

$$3(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)\geqslant \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}. \tag{1}$$

Решење. Применићемо једнакост $\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{\sin x}+\operatorname{ctg}x$ која се непосредно проверава. Добија се да је неједнакост (1) еквивалентна са

$$3(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)\geqslant \frac{1}{\sin\alpha}+\operatorname{ctg}\alpha+\frac{1}{\sin\beta}+\operatorname{ctg}\beta+\frac{1}{\sin\gamma}+\operatorname{ctg}\gamma,$$

односно са

$$(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)+(\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)+(\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\alpha)\geqslant \frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}. \tag{2}$$

Означимо површину троугла ABC са T, и искористимо ознаке са слике 1. Имамо да је

$$2T=ah_a=bh_n=ch_c=ab\sin\gamma=bc\sin\alpha=ca\sin\beta,$$

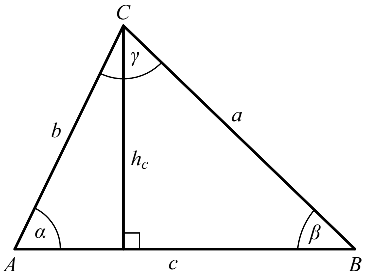
па неједнакост (2), након множења са $2T$, добија облик

$$\begin{aligned}ch_c(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)+ah_a(\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)+bh_b(\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\alpha)&\\ \geqslant \frac{1}{\sin\alpha}bc\sin\alpha+\frac{1}{\sin\beta}ca\sin\beta+\frac{1}{\sin\gamma}ab\sin\gamma,&\end{aligned}$$

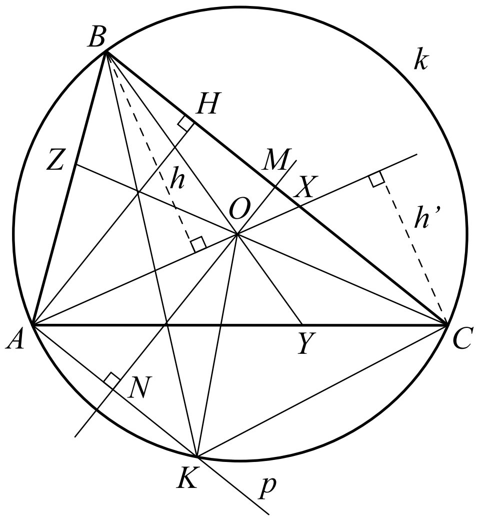
што је због $c=h_c\operatorname{ctg}\alpha+h_c\operatorname{ctg}\beta$, $a=h_a\operatorname{ctg}\beta+h_a\operatorname{ctg}\gamma$, $b=h_b\operatorname{ctg}\gamma+h_b\operatorname{ctg}\alpha$ еквивалентно са

$$c^2+a^2+b^2\geqslant bc+ca+ab,$$

а то је добро позната неједнакост.



Слика 1



Слика 2

Једнакост у (1) важи ако и само ако је $a = b = c$, тј. $\alpha = \beta = \gamma = \pi/3$, тј. ако је троугао ABC једнакостраничан.

Задатак 2. *Доказати да у оштроуглом троуглу ABC с угловима α, β, γ важи*

$$\frac{\cos\alpha}{\cos(\beta-\gamma)} + \frac{\cos\beta}{\cos(\gamma-\alpha)} + \frac{\cos\gamma}{\cos(\alpha-\beta)} \geqslant \frac{3}{2}. \tag{3}$$

Решење. Нека је O средиште кружнице k описане око $\triangle ABC$. Нека је p права паралелна са BC која садржи тачку A и нека та права сече кружницу k још у тачки K (слика 2). Означимо, даље, са AH висину троугла из темена A и са N пресечну тачку симетрале странице BC и дужи AK. Нека су, најзад, X, Y и Z пресечне тачке полуправих AO, BO и CO са страницама троугла BC, CA и AB, редом.

Четвороугао $AHMN$ је правоугаоник, па је $AH = MN$, четвороугао $BCKA$ је једнакокраки трапез (зашто?) и тако је $\measuredangle KBC = \measuredangle ACB = \gamma$ и $\measuredangle ABK = \beta - \gamma$. Даље је $\measuredangle AOK = 2\measuredangle ABK = 2(\beta - \gamma)$ (као централни и периферијски угао над AK) и $\measuredangle AON = \frac{1}{2}\measuredangle AOK = \beta - \gamma$. У правоуглом троуглу ONA је

$$ON = OA\cos\measuredangle AON = OA\cos(\beta-\gamma). \tag{4}$$

Лако се види да је

$$OM = OB\cos\alpha. \tag{5}$$

Након дељења релације (5) са (4) следи

$$\frac{OM}{ON} = \frac{OB\cos\alpha}{OA\cos(\beta-\gamma)} = \frac{\cos\alpha}{\cos(\beta-\gamma)}, \tag{6}$$

јер је $OB = OA$. Због $AK \parallel BC$ су троуглови ANO и XMO слични, па из те сличности следи

$$(7)\qquad \frac{OX}{OA} = \frac{OM}{ON} = \frac{\cos\alpha}{\cos(\beta-\gamma)}$$
$$\text{и аналогно}\quad \frac{OY}{OB} = \frac{\cos\beta}{\cos(\gamma-\alpha)}, \quad \frac{OZ}{OC} = \frac{\cos\gamma}{\cos(\alpha-\beta)}.$$

Из (7) следи да је неједнакост (3) еквивалентна неједнакости

$$(8)\qquad \frac{OX}{OA} + \frac{OY}{OB} + \frac{OZ}{OC} \geqslant \frac{3}{2}.$$

коју ћемо доказати.

Означаваћемо са $[PQR\dots S]$ површину полигона $PQR\dots S$. Нека су h и h' нормална растојања темена B и C троугла ABC од праве AX. Са слике 2 видимо да је

$$[ABOC] = [OAB] + [OAC] = \frac{1}{2}h\cdot OA + \frac{1}{2}h'\cdot OA = \frac{1}{2}OA(h+h'),$$
$$[ABC] = [AXC] + [AXB] = \frac{1}{2}h'\cdot AX + \frac{1}{2}h\cdot AX = \frac{1}{2}AX(h+h'),$$

и одавде $\dfrac{[ABOC]}{[ABC]} = \dfrac{OA}{AX}$. На исти начин је

$$\frac{[BCOA]}{[ABC]} = \frac{OB}{BY} \quad\text{и}\quad \frac{[CAOB]}{[ABC]} = \frac{OC}{CZ}$$

и након сабирања последње три једнакости добијамо

$$(9)\qquad \frac{OA}{AX} + \frac{OB}{BY} + \frac{OC}{CZ} = \frac{[ABOC]+[BCOA]+[CAOB]}{[ABC]} = \frac{2\cdot[ABC]}{[ABC]} = 2.$$

Познато је (следи из неједнакости између аритметичке и хармонијске средине) да за три позитивна броја p, q, r важи $(p+q+r)\Big(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}\Big) \geqslant 9$, па је

$$(10)\qquad \Big(\frac{AX}{OA} + \frac{BY}{OB} + \frac{CZ}{OC}\Big)\Big(\frac{OA}{AX} + \frac{OB}{BY} + \frac{OC}{CZ}\Big) \geqslant 9.$$

При том је $\dfrac{AX}{OA} = \dfrac{OA+OX}{OA} = 1 + \dfrac{OX}{OA}$ и, слично, $\dfrac{BY}{OB} = 1 + \dfrac{OY}{OB}$, $\dfrac{CZ}{OC} = 1 + \dfrac{OZ}{OC}$. Следи да је

$$\frac{AX}{OA} + \frac{BY}{OB} + \frac{CZ}{OC} = 3 + \frac{OX}{OA} + \frac{OY}{OB} + \frac{OZ}{OC}.$$

Из претходног, користећи (9) и (10), следи да је

$$\begin{aligned}\frac{OX}{OA} + \frac{OY}{OB} + \frac{OZ}{OC} &= \frac{AX}{OA} + \frac{BY}{OB} + \frac{CZ}{OC} - 3\\ &\geqslant \frac{9}{\dfrac{OA}{AX} + \dfrac{OB}{BY} + \dfrac{OC}{CZ}} - 3 = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2},\end{aligned}$$

што је и требало доказати.

Читаоцу предлажемо да ове задатке реше и на неке друге начине.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Муминагић, *Геометријски докази неких тригонометријских једнакости*, Настава математике **LVIII**, 1 (2013), 31–34.

[2] J. Carstensen, A. Muminagić, *Više rješenja jednog zadatka*, Zbornik radova "Susret nastavnika matematike" **6** (2002), 45–48, HMD, Zagreb, 2002.

A.M.: Frederiksberg, Danska

E-mail: fatima.muminagic@gmail.com