Др Шефкет Арсланагић

НЕКА ЗАНИМЉИВА СЈЕЋАЊА ИЗ МОГ ПРОФЕСОРСКОГ РАДА НА УНИВЕРЗИТЕТУ У САРАЈЕВУ[1]

Као професор предавао сам студентима прве године на Одсјеку за математику Природно-математичког факултета у Сарајеву предмет Анализа I неколико година као и студентима више техничких факултета предмет Математика I. Скупа са асистентима сам састављао задатке за писмени дио испита. Водили смо рачуна да обично између четири изабрана задатка прва два буду слична онима који су се рјешавали на вјежбама. Трећи и четврти задатак су били нешто тежи, поготово четврти који је био намијењен бољим студентима који су претендовали на високе оцјене. Обично се у таквим задацима тражила нека квалитетна идеја а не стандардни уобичајени пут за рјешавање. У својој библиотеци поред силне математичке литературе имам и данас своја предавања као и горе поменуте задатке за писмени дио испита. Сада ћемо дати више примјера тих четвртих задатака (звао сам их задаци за диференцијацију, оп. аутора).

Задатак 1. Дата је једначина

$$5x^5 + x^3 + x^2 + x + 2 = 0$$

чији су корijени x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5. Израчунај вриједност детерминанте

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_1 \\ x_3 & x_4 & x_5 & x_1 & x_2 \\ x_4 & x_5 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_5 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix}$$

.

Рјешење. Код рјешавања овог задатка већина студената је покушала да ријеши дату једначину, а онда да та рјешења уврсти у детерминанту. Наравно, то није ишло. Одмах се види да једначина нема рационална рјешења која би морала

[1] Мада је овај чланак посвећен ауторовим искуствима из факултетске наставе, сматрамо да ће неки од наведених примера бити интересантни и наставницима средњих школа (прим. ред).

бити дјелиоци броја $\frac{2}{5}$. Они ријетки, прави таленти (бивши успјешни такмичари, оп. аутора) сјетили су се и користили Вијетову формулу за дату једначину

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \tag{1}$$

као и једну важну особину детерминанти: детерминанта не мијења вриједност ако се једној врсти (колони) дода друга врста (колона) претходо помножена неким бројем. Ако, дакле, првој врсти додамо редом одговарајуће елементе друге, треће, четврте и пете врсте добијамо детерминанту чији су сви елементи прве врсте збир $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$, те је због (1) вриједност детерминате D једнака нули.

Задатак 2. Доказати да једначина $x + e^x = 0$ има реалних рјешења.

Рјешење. Очигледно је $x + e^x > 0$ за све $x \in [0, +\infty)$. Дакле, рјешење (уколико постоји) задовољава услов $x < 0$. Имамо

$$f'(x) = 1 + e^x > 0 \quad \text{за све } x \in \mathbf{R}.$$

Значи, функција f је строго растућа. Пошто је $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ и како је функција f непрекдина, то значи да њен график f пресјеца Ox-осу. Важи $f(0) = 1 > 0$ и $f(-1) = -1 + \frac{1}{e} < 0$, те (јединствено) рјешење x_0 дате једанчине задовољава услов $x_0 \in (-1, 0)$.

Задатак 3. За квадратну једначину $ax^2 + bx + c = 0$ која нема реалних рјешења важи $a + b + c < 0$. Одредити знак коефицијента c.

Рјешење. Пошто дата квадратна једначина нема реалних рјешења, то важи $b^2 - 4ac < 0$, тј. $ac > \frac{b^2}{4}$. Сада имамо:

$$c(a+b+c) = ac + bc + c^2 > \frac{b^2}{4} + bc + c^2 = \left(\frac{b}{2} + c\right)^2 \geqslant 0.$$

Како је $a + b + c < 0$, то слиједи да је $c < 0$.

Задатак 4. Доказати да важи неједнакост

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2 - x^3}} \geqslant \frac{\pi}{6}.$$

.

Рјешење. Многи студенти су покушавали да израчунају неодређени интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2 - x^3}}$$

и при томе користили разне методе, али нажалост то није ишло. Они најбољи о којима сам раније говорио су уочили да за $x \in [0, 1]$ важи неједнакост

$$\frac{1}{4 - x^2 - x^3} \geqslant \frac{1}{4 - x^2},$$

а одавде

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}} \geqslant \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6},$$

што је и требало доказати.

Задатак 5. Израчунати $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx$.

Рјешење. Овај задатак је ријешило нешто више студената на уобичајени начин. Користили су познату смјену $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$, а одавде: $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ и $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Сада имамо:

$$I = \int_0^1 \frac{\dfrac{2t}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2} + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2} = -4\int_0^1 \frac{t}{(t^2+1)(t^2-2t-1)}\, dt.$$

Пошто је $t^2-2t-1 = 0$ за $t = 1\pm\sqrt{2}$, то је $t^2-2t-1 = (t-(1+\sqrt{2}))(t-(1-\sqrt{2}))$. Сада имамо:

$$\frac{t}{(t^2+1)(t^2-2t-1)} = \frac{A}{t-(1+\sqrt{2})} + \frac{B}{t-(1-\sqrt{2})} + \frac{Ct+D}{t^1+1},$$

а даљи поступак је познат. Ипак, прилично посла!

Но, они бољи су израчунали дати интеграл на један елегантан и допадљив начин. Нека је $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\, dx$. Сада имамо

$$I_1 + I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2},$$

те

$$\begin{aligned} I_1 - I &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} \\ &= \ln|\sin x + \cos x|\Big|_0^{\pi/2} = \ln 1 - \ln 1 = 0. \end{aligned}$$

Сада слиједи

$$2I = \frac{\pi}{2}, \quad \text{тј.} \quad I = \frac{\pi}{4}.$$

Задатак 6. За $A = \displaystyle\int_1^3 \frac{x}{1+x^5}\, dx$ наћи $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{2}{5} + A\Big)^n$.

Рјешење. Већина студената је покушавала да израчуна интеграл на разне начине, али нажалост то није ишло. Ипак, неки су се сјетили Симпсонове апроксимативне формуле

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{b-a}{6}\Big[f(a) + 4f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)\Big]. \tag{2}$$

У нашем случају је $f(x) = \dfrac{x}{1+x^5}$, те:

$$a = 1, \quad b = 3, \quad \frac{b-a}{6} = \frac{1}{3} \approx 0{,}3333;$$
$$f(a) = f(1) = \frac{1}{2} = 0{,}5000; \quad f(b) = f(3) = \frac{1}{244} \approx 0{,}0123;$$
$$\frac{a+b}{2} = 2; \quad f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) = f(2) = \frac{2}{33} \approx 0{,}0606.$$

Сада из (2) имамо

$$A = \int_1^3 \frac{x\,dx}{1+x^5} \approx 0{,}3333(0{,}500 + 0{,}2424 + 0{,}0123) \approx 0{,}2515,$$

одакле $\dfrac{2}{5} + A \approx 0{,}6515$, па је

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{2}{5} + A\Big)^n = \lim_{n\to\infty}(0{,}6515)^n = 0.$$

Задатак 7. Израчунати

$$I = \int_0^\pi \frac{\sin\Big(n + \dfrac{1}{2}\Big)}{\sin\dfrac{x}{2}}\,dx, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Решење. Већина студената је безуспјешно покушавала да израчуна дати интеграл користећи разне методе. Мали број је то урадио врло елегантно користећи једнакост

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin\Big(n + \dfrac{1}{2}\Big)}{\sin\dfrac{x}{2}}. \tag{3}$$

Неки су при томе дали и доказ ове једнакости помоћу математичке индукције (могли су користити и комплексне бројеве). Сада због (3) добијамо

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi = \Big(\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx\Big)\,dx \\ &= 2\Big(\frac{1}{2}x + \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \cdots + \frac{1}{n}\sin nx\Big)\Big|_0^\pi = \pi, \end{aligned}$$

јер је $\sin 2k\pi = 0$, $k = 1, 2, \ldots$.

Задатак 8. Израчунати

$$I = \int_{-1/2}^{1/2} \cos x \cdot \ln\frac{1+x}{1-x}\,dx.$$

Рјешење. И овде је већина студената је покушала да израчуна овај интеграл користећи методу парцијалне интеграције, али то није ишло. Но, они мудрији су уочили да је функција

$$f(x) = \cos x \cdot \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad x \in (-1, 1)$$

непарна, тј. да важи $f(-x) = f(x)$. Заиста, имамо да је

$$\begin{aligned} f(-x) = \cos(-x) \cdot \ln \frac{1-x}{1+x} &= \cos x \cdot [\ln(1-x) - \ln(1+x)] \\ &= -\cos x \cdot [\ln(1+x) - \ln(1-x)] = -\cos x \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} = -f(x). \end{aligned}$$

Пошто су границе интервала интеграције симетричне у односу на координатни почетак 0, то је $I = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Аднађевић, З. Каделбург, *Математичка анализа I*, 11. изд, Математички факултет и „Круг“, Београд, 2014.

[2] M. Marjanović, *Matematička analiza I*, Naučna knjiga, Beograd, 1983.

[3] B. Mesihović, Š. Arslanagić, *Zbirka riješenih zadataka i problema iz matematike sa osnovama teorije i ispitni zadaci*, "Svjetlost", Sarajevo, 1988.

Природно-математички факултет, Универзитет у Сарајеву, Босна и Херцеговина

E-mail: asefket@pmf.unsa.ba