Др Павле Миличић

НЕКЕ ЦРТИЦЕ ИЗ ИСТОРИЈЕ МАТЕМАТИКЕ

Темељи математичког стваралаштва, основни појмови, на којима је или с којима је изграђена савремена математика, данас се могу описати егзактно савременим језиком. Реч је о основним појмовима математике, који су настајали вековним потребама битствовања усамљеног човека у суровим условима живота, његовом борбом за опстанак на Земљином шару.

Не зна се поуздано где се и у којем периоду јављају прве спознаје из области математике. Верује се да оне датирају из времена када су настајале прве цивилизације. На основу археолошких налаза утврђено је да су древни Сумери из јужне Месопотамије и древни Египћани имали међу првима на Блиском истоку релативно високо развијене културе. Још око 3000 година п.н.е. они су располагали многим знањима из геодезије, грађевинарства и астрономије. Сумерски град Вавилон који се налази неких 90 km јужно од данашњег Багдада био је центар тадашњег сазнања из разних области науке. Грчки историчар Херодот (5. век п.н.е.) наводи да геометрија потиче из Египта. Трагови о томе постоје и у Рајндовом папириусу и на глиненим плочицама с подручја Блиског, Средњег и Далеког истока. Из дешифрованих глинених плочица сазнајемо да су Вавилонци знали да решавају разне проблеме из геометрије и аритметике. Од Индуса су остали неки задаци које су они решавали у 3. веку п.н.е. Од њих потичу и тзв. арапски бројеви 1, 2, 3, ...

Дакле, и пре Грка постојала су нека знања из математике и корисне математичке законитости (које су се користиле у тадашњој животној пракси), па чак и неки математички симболи. Неки историчари математике тврде да су Питагорину теорему знали стари Египћани. Математичке законитости древних Египћана, Вавилонаца и Индуса стицане су емпиријским путем и прихватане су без доказа. У тврђењима код њих није постојало питање „зашто?“, постајало је само питање „како?“, како нешто урадити. Са Грцима почиње ново доба математичког закључивања. Код њих постоји питање „зашто?“. Напушта се индуктивни метод закључивања и почиње период тзв. дедуктивног метода. Усваја се начело систематизације дотадашњих знања у математици. Родоначелник старогрчке математичке школе је велики филозоф Талес из Милета (640–548. п.н.е). Путујући у Египат и Вавилон упознао је све што се до тада знало из математике. Неки историчари сматрају да је он први у историји математике почео да доказује нека математичка тврђења. А прве аксиоме, недоказана тврђења, из којих се изводе сва остала тврђења, сматра се да је увео највећи грчки филозоф Аристотел (384–322. п.н.е.). То су вероватно најквалитетнији кораци у историји настанка научне мисли уопште.

До краја 3. века п.н.е. Грци су имали доста знања о разним геометријским чињеницама. Платонов ученик Еуклид (око 330–275. п.н.е.), „александријски мудрац", како су га називали неки историчари математике, у свом капиталном делу *Елементи*, систематизује сва та знања и приказје их на нов начин, дедуктивно. *Елементи* су најзначајнија књига свих времена у области геометрије. У тој књизи доследно се прихвата начело да се свако математичко тврђење мора доказати и извести из раније познатог тврђења, помоћу раније познатих појмова и уз коришћење неких тврђења која се не доказују, сматрају се очигледним, и називају аксиомама или постулатима. То је било најсистематичније математичко дело тог времена. Оно је постало камен темељац математичког стваралаштва које се почело развијати. Уведени су појмови који су чисто математички.

Апстраховање у формирању тих математичких појмова је пресудно. Апстраховањем од присутних стварних појмова из реалног окружења долази се до, на неки начин, идеализације тих појмова, које ми можемо замислити, али их не можемо видети. И пре Грка постојали су неки геометријски појмови. На пример, постојао је појам геометријског тела за који се од одговарајућег физичког тела из реалног света подразумева само његов просторни део, без икаквих физичких својстава, као што су тежина, боја, густина итд. Идеализацијом појма правца до неке тачке долази се до појма праве линије итд. Апстраховањем се издвајају битна инваријантна својства. То прво апстраховање појмова из реалног света и записана тврђења о тим појмовима из предгрчког периода омогућиле су Еуклиду да напише *Елементе*, дело које се сатоји од 13 књига од којих је 5 посвећено аритметици и пропорцијама, а остале геометрији. Свака књига почиње дефиницијама појмова који се користе у тој књизи. Тако прва књига има 23 дефиниције. Наведимо неке: Дефиниција 1. „Тачка је оно што нема делова"; Дефиниција 2. „Линија је дужина без ширине"; Дефиниција 3. „Границе линија су тачке", итд. Наравно да ове и неке друге дефиниције из *Елемената* нису коректне. Неки појмови чак и ако нису геометријски се напросто не могу дефинисати. На пример, време које протиче не може се дефинисати коректно, осим што кажемо да је то линеарни континуум. Ево и једног Еуклидовог постулата: Постулат 3. „Из сваког центра може се описати кружница сваког полупречника". А ево и две аксиоме: Аксиома 1. „Ако једнаке увећамо једнаким добијамо једнаке"; Аксиома 8. „Цело је веће од његовог дела".

Такозвани Пети постулат, који је у ствари аксиома, тврди да кроз дату тачку ван дате праве постоји само једна права паралелна тој правој, вековима је био један од главних проблема с којим су се математичари бавили. Проблем је био у томе да се одгонетне да ли је тај аксиом независан од осталих аксиома. Више од 20 векова овај проблем је остао нерешен иако су га решавали многи велики математичари, као што су Ламберт, Сакери, Лежандр и други. Нађено је у том периоду много „доказа" да он није независан од осталих аксиома. Проблем Петог постулата решио је 1826. год. руски математичар Лобачевски (Н. Лобачевский, 1792–1856). Доказао је да је тај постулат (аксиома) независан од осталих аксиома те да се еуклидска геометрија не може изграђивати без његовог усвајања. Његова негација с осталим пречишћеним Еуклидовим аксиомама чини један нов непротивречан систем аксиома који дефинише сасвим нову геометрију која је позната као геометрија Лобачевског. Упркос томе што су *Елементи* одиграли историјску улогу у математици, данашњим математичарима добро је познато да Еуклидове дефиниције основних појмова и формулације аксиома или постулата имају много недостатака. Осим тога Еуклид се ослањао на очигледност тачности неких својих тврђења. Употребљавао је више недефинисаних појмова као што су „граница“, „дужина“ дужи, „непрекидност“, „кретање“ итд. А и оне дефиниције које је користио биле су углавном некоректне. Дакле, са савремене тачке гледања, систем његових аксиома имао је много недостатака. Савременим математичким језиком речено: био је непотпун, није био независан и није био непротивречан. Ипак, *Елементи* су за каснију математику оставили трајни значај, због следећих чињеница: прво, решавањем Петог постулата створене су нееуклидске геометрије; друго, проблем несамерљивости одређених дужи на које је указао Еуклид примакао се проблему стварања представе о реалним бројевима и треће, принцип аксиоматско-дедуктивне теорије из *Елемената* постао је принцип стваралаштва у целој математици.

Тек је Хилберт (D. Hilbert, 1862–1943) дефинитивно решио све проблеме око аксиоматике еуклидске геометрије. Као што се добро зна, поред 20 аксиома, које усваја, Хилберт усваја 3 основна појма које не дефинише – права, тачка раван и 4 основне релације које повезују те појмове – „тачка лежи на правој (равни)“, „бити између“, „конгруентност дужи“ и „конгруентност углова“. Савременим математичким језиком речено, Хилбертов систем аксиома еуклидске геометрије је потпун, непротивречан и минималан. Он је иницирао и подстакао појаву аксиоматике разних других математичких дисциплина, као што су аксиоме разних нееуклидских геометрија, аксиоме поља реалних бројева, аксиоме теорије вероватноће, аксиоме метричких простора, тополошких простора, аксиоме теорије скупова итд. За изградњу комплетне математике, разних математичких дисциплина, наравно, потребно је много више апстрактних појмова (неки су основни, а неки изведени) и аксиома од оних основних појмова из Хилбертове аксиоматике. Незаобилазни су савремени појмови као што су појам скупа, аксиоме поља реалних бројева, појам бијекције (обострано једнозначног пресликавања скупова), појам релације еквиваленције, појам изоморфизма математичких структура, појмови актуалне и потенцијалне бесконачности итд.

С Хилбертовом аксиоматиком еуклидска геометрија постаје, рекло би се, савршена математичка дисциплина. Таквог су мишљења били два велика Хилбертова савременика, филозофа – Расел (B. Russel, 1872–1970): „Ако би научна открића икад дошла у сукоб с еуклидском геометријом, требало би одбацити та открића, а не еуклидску геометрију“; Поенкаре (H. Poincaré, 1854–1912): „Треба мењати законе физике ако се они не слажу с еуклидском геометријом, а не еуклидску геометрију“. Развој савремене физике (квантна физика, Анштајнова теорија релативитета и др), међутим, не слаже се с овим тврђењима. Али, у сваком случају, еуклидска геометрија је с Хилбертовом аксиоматиком постала образац како треба дедуктивно изграђивати друге математичке дисциплине.

Дуго времена од почетка стварања математике, када је почела систематизација разних наука, математичари и филозофи су сматрали да је математика природна наука. Данас је сасвим јасно да то није тачно. Математика је апстрактна дедуктивна наука која се заснива на усвојеним основним апстрактним појмовима и усвојеним аксиомама, које логички повезују основне појмове и дају им смисао. Основни појмови и аксиоме, наравно, нису произвољно бирани, без везе с реалним светом. Основни појмови су настали апстраховањем неких реалних појмова реалне стварности, а основна тврђења (аксиоме) су карактерисале основне појмове у сагласности с реалном стварношћу. Треба истаћи да сви Хилбертови основни појмови (тачка, права, раван) у стварности не постоје, као реални објекти, већ само у нашој машти. Дакле, не постоји у природи тачка иако без тог појма нема математике. Не постоји права, не постоји раван. У стварности не постоје ни неки изведени појмови из ових. На пример, не постоји кружна линија дефинисана исправно помоћу основних појмова који се не дефинишу, не постоји геометријски вектор (као усмерена дуж) али га користимо свуда у математици и физици и дајемо му различита значења. Иако не постоје ти објекти, човек има сасвим одређену представу о њима и помоћу њих описује реални свет у коме живи. Дакле, основни појмови у савременој еуклидској геометрији су апстрактни објекти које човек замишља да постоје. Могу да им се припишу различита реална значења од уобичајених.

Еуклид је својим *Елементима* покушао да дефинише основне појмове и „дефинисао“ их је помоћу недефинисаних појмова. Али, ни ти основни појмови које Еуклид дефинише нису произвољно изабрани, и они су иницирани појмовима из реалног света. Истина, могли бисмо, уместо значења који они имају у нашој свести, замислити и неке друге објекте које повезују аксиоме које важе за тачке, праве и равни, али ови изабрани најбоље одговарају за изградњу геометрије. Упркос томе што ови појмови не постоје у реалном свету, наука их користи као да постоје, и не може без њих. (Па, да ли је то могуће да човек користи нешто што не постоји? Да!) На сваком кораку у еуклидској геометрији, и у теорији разних апстрактних математичких простора користе се ти нееднозначни, апстрактни појмови. Техничке науке су се стварале помоћу лењира и шестара, материјалних справа којима се „описују“ основни апстрактни појмови. Еуклидска геометрија и њена аксиоматика, као и њена метрика, подстакле су стварање разних других апстрактних математичких структура у различитим амбијентима са својим „тачкама“. Тако, на пример, данас имамо амбијент нормираног простора непрекидних функција на сегменту $[0, 1]$. У том простору тачку представља функција и постоји тачно дефинисано растојање између две функције, као растојање између две тачке тог простора. Све ово говори да математика није природна наука, она је апстрактна дедуктивна наука, неопходан језик за описивање реалног света. Природне науке (као што је биологија) немају своје аксиоматике али користе математички језик у својим тврђењима.

Већ у 18. веку математика је била на високом нивоу свог развоја, и по продуктивности научних достигнућа и по строгости којима су та достигнућа приказана, и на високом нивоу својих примена у разним другим наукама. Међутим, прве пукотине у математици појавиле су се још у *Елементима* где је констатована несамерљивост странице квадрата и његове дијагонале, нису самерљиве ни странице тзв. златног правоугаоника (дужине страница му стоје у односу златног пресека). Нису довољни рационални бројеви за мерење дужина. Та криза је у потпуности решена тек у другој половини 19. века изградњом поља реалних бројева. Ученици тзв. Александријске школе Архимед и Аполоније су својим радовима трасирали пут према појмовима граничних вредности и инфинитензималног рачуна у 17. и 18. веку, времену Њутна и Лајбница и времену њихових наследника у 19. и 20. веку.

Еуклидска геометрија се две хиљаде година сматрала као образац апсолутне тачности. Математика се више од 2000 година развијала у оквирима Еуклидових *Елемената* и грчког стваралаштва. Наступило је време када су ти оквири постали тесни. Из тих оквира су је извели инфинитезимални рачун, Канторова (G. Cantor, 1845–1918) теорија скупова, нееуклидске геометрије и кватерниони (1843. год) као некомутативна алгебарска структура. Почиње сумња у математику као савршену науку. Пре Кантора је Галилеј (G. Galilei, 1564–1642) 1638. године показао да је једнак број свих природних бројева и свих парних природних бројева. То није било у складу са Еуклидовом аксиомом „цело је веће од сваког свог дела“. Још тада су се појавиле сумње у тачност неких математичких расуђивања. Творац Теорије скупова Кантор први је увео појам бијекције скупова (обострано једнозначно пресликавање између два скупа), дефинисао је бесконачни скуп као скуп за који постоји бијекција између њега и његовог правог дела. За коначан скуп таква бијекција не постоји. Увео је појам актуалне бесконачности и кардиналности бесконачног скупа X као „броја елемената“ тог скупа, у ознаци $\operatorname{card} X$. Показује да постоји бијекција између скупа тачака сегмента $[0, 1]$ и тачака тродимензионог простора $\mathbf{R}^3$. То значи да су ова два скупа једнаке кардиналности. Тада је Хилберт узвикнуо: „Бесконачност? Никад ниједно питање није тако дубоко узнемирило људски дух!“. Ово је била прва математичка теорија која је изашла из оквира античке Грчке математике. Ове чињенице нису биле у потпуности у сагласју с математичким ставовима ранијег времена.

Тако се током 19. века поставило много питања о стању математике тог доба. Да ли је цела математика, с обзиром на њену аксиоматику (ако постоји таква аксиоматика), у свакој својој области, савршена дедуктивна дисциплина, да ли сва њена тврђења кореспондирају с реалним светом? Да ли је њена аксиоматика потпуна? Да ли је исправна дедукција коју упражњавају ствараоци математике? Средином 19. века математичари су морали да признају да у појединим математичким доказима постоје недостаци. Наиме, на нивоу фундирања неких математичких дисциплина уочени су извесни недостаци. Штавише, неки математичари су открили да су били у заблуди у неким својим тврђењима. Показало се да се неки математички закони не могу узимати као апсолутне истине. Новонастала нееуклидска геометрија, Канторова проблематика уређења бесконачних скупова, топологија, апстрактне групе и кватерниони у алгебри нису били у сагласности с неким ранијим тврђењима основа математике. Кантор је показао је да је скуп свих целих бројева строго мањи од скупа реалних бројева ($\mathrm{card}\,\mathbf{Z} < \mathrm{card}\,\mathbf{R}$). Појавила се хипотеза континуума која гласи: Ако је $\mathrm{card}\,\mathcal{P}S$ кардинални број скупа свих подскупва скупа S (тзв. партитивни скуп скупа S), тада не постоји скуп X такав да је $\mathrm{card}\,S < \mathrm{card}\,X < \mathrm{card}\,\mathcal{P}S$ (јасно је да тврђење не важи ако је S коначан скуп). Кантор је веровао да је хипотеза континуума тачна, и годинама је покушавао да је докаже, али без успеха. Ово питање је постало прво на списку важних отворених питања које је Хилберт представио у Паризу на Међународном математичком конгресу 1900. год.

Појавили су се и други проблеми, на пример, проблем тоталног уређења бесконачног скупа. Тај проблем је навео Цермела (E. Zermelo, 1871–1953) да уведе у коришћење тзв. аксиому избора, која би неформално могла да гласи: у сваком скупу из неке фамилије скупова може да се фиксира (изабере) један његов елеменат; из тако издвојених елемената може да се формира нови скуп. Раније се употребљавало то тврђење као нормално без икаквих ограда, у разним закључивањима. Да ли се ово тврђење може доказати? Цермелов систем аксиома о скуповима усавршио је 1922. израелски математичар Френкел (A. Fraenkel, 1891–1965). За математичаре ствараоце постала је функционална тзв. ZF теорија скупова. Осим тога, још је уз Аристотелову противречност, тзв. закон искључења трећег, сада је постао актуелан појам непротивречности. Крајем 19. века је Паш (M. Pasch, 1843–1930) закључио да сваки употребљив систем аксиома мора бити непротивречан.

У том смислу су се почела преиспитивати разна математичка тврђења. Дакле, појавиле су се препреке у дотадашњем математичком закључивању и питање има ли противречних тврђења у математици. Да ли је закључивање дедукцијом, на којој је створена математика, апсолутно истинито закључивање? Аустријски математичар Гедел (K. Gödel, 1906–1978) је 1940. год. показао да хипотеза континуума не може бити оповргнута стандардном ZF аксиоматиком скупова. Коен (P. Cohen, 1934–2007) је 1963. год. показао да уз исте ове аксиоме хипотеза континуума не може бити ни доказана. Стога је хипотеза континуума независна од ZF теорије скупова са аксиомом избора. Хипотеза континуума није била први исказ независан од ZF теорије скупова са аксиомом избора. Директна последица Геделове теореме непотпуности, објављене 1931. год, јесте да постоји формални исказ који изражава конзистентност ZF теорије скупова са аксиомом избора, који је независан од ње. Овај исказ о конзистентности је метаматематичке природе, пре него чисто математичке. Хипотеза континуума и аксиома избора су биле међу првим математичким тврђењима за које је показано да су независни од ZF теорије скупова.

Општа је чињеница да су се препреке при стварању нових математичких истина отклањале увођењем нових аксиома, односно модификцијом постојеће аксиоматике. Уз то је интуиција била главни покретач настајања нових садржаја. За стварање нових резултата у математици, осим интуиције, незаобилазно су се користиле методе: апстракција, уопштавање и специјализација. Наравно, не постоје јединствене основе за сва изведена тврђења у математици. Нека тврђења у новим математичким областима не кореспондирају са одговарајућим тврђењима у дотадашњој математици! Било је у току развоја математике много тврђења која су касније била одбачена. Гиганти науке као што су Ојлер, Коши и Лагранж направилиу су неправилне основе Математичке анализе. (Нису ни могли да их направе бољим јер нису имали тачне основе поља реалних бројева). Ојлер је тврдио да $0/0$ може да има више значења, јер из $n \cdot 0 = 0$ „следи" да је $n = 0/0$. Коши је веровао да из непрекидности функције у некој тачки следи њена диференцијабилност у тој тачки. Овде је исправно навести мисао филозофа Л. Бер-а: „Заблуде, грешке и мане великих много су поучније него исправна дела малих". Вајерштрас је исправио Кошија дефинишући функцију која је непрекидна у свакој својој тачки али није дефернцијабилна ни у једној тачки.

У 19. веку многи велики математичари су били убеђени да је математика савршена научна дисциплина без икаквих недостатака. А они који нису били убеђени у то, проналазили су у њој разне парадоксе. Канторова теорија скупова са краја 19. века није била заснована аксиоматски (тзв. наивна теорија скупова). Међутим, она је имплицитно у себи садржала неколико аксиома од којих је једна била: За свако својство можемо формирати скуп свих елемената који имају то својство. Расел је 1903. г. својим парадоксом о скупу свих скупова S који нису сами себи елемент (да ли је сам скуп S у том скупу?), оборио наивну теорију скупова. Они који су веровали у исправност свих математичких достигнућа, покушавали су то и да докажу. Најистакнутији међу њима био је Хилберт. Он је 1900. год. на Светском конгресу математичара објавио 23 до тада нерешена проблема. Указао је, поред осталог, на проблем непротивречности у аксиоматикама разних математичких дисциплина. Његове идеје данас су познате као Хилбертов програм. Састоје се у томе да се направи коначан систем аксиома, без контрадикција, које описују целу математику. Он је био убеђен да се такав систем аксиома могао свести на основну аритметику. Многи савременици математичари су били уверени да је Хилберт у праву, али било је и супротних мишљења.

Крајем 19. века постојали су аксиоматски системи у разним математичким дисциплинама тако да је општа математика достигла висок ниво и по обиму теоријских резултата и по њеним применама, али није била без недостатака.

Преиспитивање противречности разних тврђења из математике и филозофије довело је крајем 19. века до појаве нове дисциплине – Математичке логике, која установљава законе о исправном логичком закључивању. Сматра се да ју је основао енглески математичар Бул (G. Boule, 1815–1864). Још је Аристотел користио појам тзв. непротивречности при математичком закључивању, у смислу: исказ не може бити истовремено тачан и нетачан. У Математичкој логици је истакнут Закон искључења трећег – сваки исказ мора бити или тачан или нетачан, нема треће могућности. Расел је у *Principia Mathematica* тврдио да је формулација тог закона бесмислена. Ни Декарт није био сигуран да су основе математичке логике исправне. Француски математичар Лебег (H. Lebesgue, 1875–1941), који је математику обогатио појмовима Лебегове мере и Лебеговог интеграла, био је против увођења аксиоме избора. 1910. године Хилберт и Бернајс (P. Bernays, 1888–1977), у првом издању своје књиге *Основи математике*, укључили су аксиому бесконачности и аксиому избора. Постала је функционална ZF теорија скупова. Осим тога је сада постао актуелан појам непротивречности. У том смислу су се почела преиспитивати разна математичка тврђења. Има ли противречних тврђења у математици?. Да ли је закључивање дедукцијом, на којој је створена математика, апсолутно исправно закључивање? Да ли је свако тврђење у математици могуће доказати или оповргнути?

Геделов рад из 1931. године уздрмао је спокојство тадашњих врхунских математичара. Његове две теореме о некомплетности откривају да математика није савршена наука, као што се то до тада сматрало. Сада се обе теореме цитирају као Геделова теорема о некомплетности. Ова теорема показује да не постоји потпун и конзистентан формални систем који коректно описује природне бројеве и да ниједан довољно строг систем који описује природне бројеве не може да потврди своју сопствену конзистентност. При томе, у Математичкој логици, неки формални систем сматра се конзистентним ако не садржи контрадикције (за сваки исказ φ, не могу у исто време и φ и њему противречан $\neg\varphi$ бити доказиви), а систем је потпун ако је довољан да се на њему изгради одговарајућа теорија у целини.

Гедел је срушио све оно у шта су математичари више од 20 векова веровали. Геделове теореме су доста широко прихваћене као доказ да је немогуће остварити Хилбертов програм проналажења потпуног и конзистентног скупа аксиома који би важио за целу математику. Другим речима, немогуће је пронаћи неки универзални систем аксиома из којег би аутоматски следио и доказ о непротивречности теорије која би била изграђена на бази тог система. Напротив, непротивречност неког система аксиома своди се на непротивречност неког другог система аксиома који се већ сматра непротивречним. Гедел тврди да ако прихватимо коначан систем аксиома, које Хилберт предлаже, имаћемо увек једно тврђење које нећемо моћи ни доказати ни оповргнути помоћу тих аксиома. Ако се изађе у већи (шири) систем аксиома доказ је могућ, али онда тај нови већи систем аксиома имаће поново изказ који неће моћи да се докаже са проширеним системом аксиома већ се може доказати само у још већем систему, и тако у недоглед. Тако је математичко сазнање предодређено да заувек остане делимично непотпуно (некомплетно). Лавина критика и писмене кореспонденције међу математичарима а и филозофима потрајала је неколико година. Сензационални новински наслови говорили су о крају математике, о очају многих што им се деценијска научна каријера руши само због једног научног рада младог непознатог аустријског доктораната. Не постоји апсолутна истина, не постоји једна теорија која може да објасни целокупну математику. Можемо сазнати много али не можемо сазнати све!

Али математика се развијала и даље сукобљавајући се с логичким препрекама. Данас се математика развија врло брзо. То пре свега важи за Математичку логику. Напомена у првом тому *Основа математике* да теореме о непотпуности ипак нису у стању да сруше његову теорију доказа било је једино помињање Гедела у Хилбертовим списима. Најугледнији међу математичарима и филозофима епохе Бернард Расел није видео теореме о непотпуности као доказ да нешто није у реду са његовом или Хилбертовом теоријом. Он је сматрао да је Геделов приступ математици био авангардан у тренутку објављивања његове књиге *Principia Mathematica* 1910. год, али да је то 30-их година био стандард у логици. Један од највећих математичара 20-ог века фон Нојман (Janos von Neumann, 1903–1957) (дао значајне прилоге у функционалној анализи, топологији, теорији скупова, информатичкој и нумеричкој анализи, теорији игара, квантној физици, механици флуида итд) увидео је значај Геделовог рада. За Гедела је сматрао да је неоптерећен великим именима сигуран у своје идеје и доказе, указао је на грешке у стварању математике и променио математичку логику и целокупну математику, за сва времена. Увео је математичке ствараоце у 20. век и омогућио им да у будућем стваралаштву иду сигурнијим стазама. Након Гедела можда математика није постала основа за све егзактне науке, али је омогућила настанак нових дисциплина попут рачунарства и информатке које су потом промениле и друге науке и људске животе током 20. и 21. века.

Дакле, математичка знања остају некомплетна? Наишло је бурно негодовање математичара који су покушавали да пронађу грешку у таквом резоновању. Група француских математичара, Хилбертових поклоника, међу којима су и Дједоне (J. Dieudonné, 1906–1992) и Шварц (L. Schwartz, 1843–1921), водећи тополози свог времена, са заједничким псеудонимом Никола Бурбаки (Nicolas Bourbaki) прихватила се 1935. године амбиционог циља, да, само на основу ZF теорије скупова и новоуведеног појма изоморфизма структура и њихових аксиома (користећи и Геделове резултате), напишу строго аксиоматски целокупну математику тога времена и исправи све дотадашње њене недостатке. Поставили су себи задатак да на истој основи изведу реконструкцију свих различитих математичких дисциплина. Језиком теорије скупова објавили су до 1940. год. 35 томова монографија (са више од 7000 страница) под насловом *Елементи математике*. На пример, они су Линеарну алгебру изложили без употребе теорије реалних бројева. Њихове монографије су постале стандардне референце о основним аспектима модерних математиких структура. Ипак оне нису могле да остану као трајне основе математике.

Какав се може извести закључак о стању математике данас и о њеној будућности? У извесном смислу променио се поглед на савремену математику. Математика је нарасла с новим областима Функционалне анализе. Извршена је надградња Математичке анализе Лебеговом Теоријом мера и интеграција (1902), Собољевом (С. Л. Собольев, 1908–1989) теоријом Уопштених функција (1936), Шварцовим дистрибуцијама, Данжуовим (A. Denoy, 1884–1974) уопштеним интегралима на тополошким просторима и многим другим уопштењима. Појавило се и доста нових области математике: Диференцијабилне многострукости, Рачунарство, Програмирање, Алгоритми, Аутоматско управљање итд. Математика је никад завршена прекрасна наука. Кантору, творцу теорије скупова и трансфинитних бројева, приписује се изјава: „Математичари не стварају математичке појмове и теореме, они их откривају. Математичке истине се откривају а не стварају."

Са сигурношћу се може рећи да је, данас, математика моћна наука која се стално развија због своје сопствене надоградње и због потреба да се реше многи проблеми из разних других наука. Ако се прати годишња продукција чланака реферативног америчког часописа Mathematical Reviews у којима се реферишу најважнији нови резултати, који се појављују по разним светским научним часописима, онда се може закључити да се годишње објави више од 30 000 научних радова из математике. (У овом часопису био сам више од 30 година сарадник и у њему реферисао више од 25 научних резултата из функционалне анализе од различитих светских аутора.) Позната је и Пуенакреова изјава који каже: „Нема решених проблема у математици, већ само мање или више решених проблема“.

На крају закључимо да математика није идеална апстрактна наука, без икаквих недостатака, са савршеном строгошћу у њеном стваралаштву, супротно уверењу које је било присутно ранијих година. То је зато што не постоје статичке основе (аксиоме) за целу математику. Њене основе се стално допуњују да би се избегле препреке на које наилазимо у даљем стваралаштву, на које је указао Гедел. Сваки добро дефинисан математички проблем може се решити у оквиру одређеног система аксиома. Али, постоји проблем јединствености аксиоматике, што потврђује Геделова теорема о комплетности. Вероватно се иделно строго дедуктивна наука, с фиксном аксиоматиком, и не може никад комплетно направити.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Математическая энциклопедия* 1–5, Главны редактор И. М. Виноградов, Москва, 1977.
2. E. T. Bell, *Veliki matematičari*, Znanje, Zagreb, 1972.
3. М. Клаин, *Математика – утрата определенности*, Мир, Москва, 1984.
4. Ф. Марић, И. Лаловић, *Класични докази Геделове теореме о непотпуности*, МАТ-КОЛ (Бања Лука), XX(2) (2014).
5. Đ. Kurepa, *O tri osnovna suda u teoriji skupova i njihovoj konjunkciji*, Matematička biblioteka 25 (1963).
6. L. Chambadal, *Dictionnaire des mathématiques moderne*, Librairie Larousse, Paris, 1975.

Математички факултет, Београд

E-mail: pavle.milicic@gmail.com