НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
LXVI, 3-4 (2021), 57–64

Др Зоран Каделбург

ДВЕ СТОТИНЕ ГОДИНА ОД ПРВОГ ИЗДАЊА КОШИЈЕВОГ УЏБЕНИКА „КУРС АНАЛИЗЕ"

1. Увод

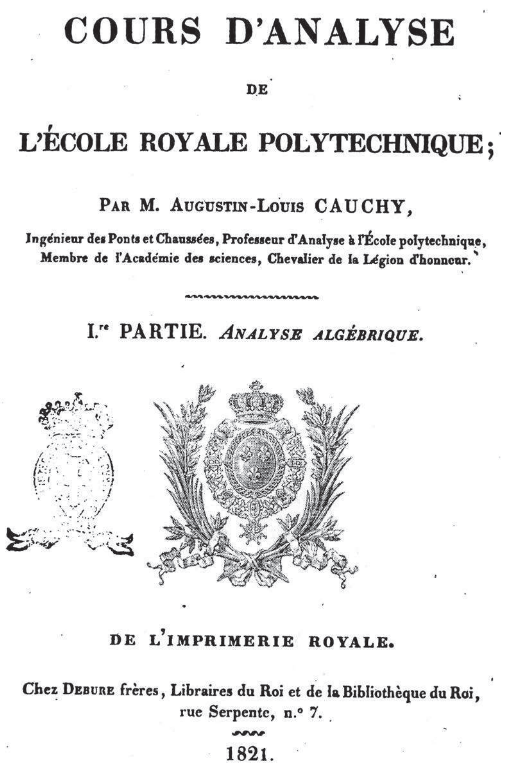
Након што су Њутн (Isaac Newton, 1643–1727) и Лајбниц (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716) у другој половини XVII века засновали диференцијални рачун и повезали га с интегралним, велики број математичара је у наредних век и по разрађивао њихове идеје и примењивао методе математичке анализе у разним областима. Поменимо само породицу Бернули (Jacob Bernoulli, 1655–1705; Johann Bernoulli, 1667–1748; Daniel Bernoulli, 1700–1782), Ојлера (Leonhard Euler, 1707–1783), Лагранжа (Joseph Louis Lagrange, 1736–1813), Лапласа (Pierre-Simon Laplace, 1749–1827), Фуријеа (Jean-Baptist Joseph Fourier, 1768–1830), Гауса (Carl Friedrich Gauss, 1777–1855), ... Међутим, њихово третирање ове проблематике, мада је довело до веома великог броја важних резултата, често није било строго са данашње тачке гледишта. Могло би се мало слободније рећи да су „имали пуне руке посла" трудећи се да извуку што више користи из „алата" диференцијалног и интегралног рачуна да би „губили време" на његово строго заснивање.

Коначно је Коши (Augustin-Louis Cauchy, 1789–1857) решио да посвети дужну пажњу проблему прецизног заснивања теорије граничних вредности, а с тим и непрекидности, извода и интеграла. Када је постављен за професора на, у то време најугледнијој, париској Политехничкој школи *l'École Royale Polytechnique*, решио је да напише уџбеник Математичке анализе у којем ће основни појмови и ставови ове дисциплине бити строго засновани. Како је сам написао у уводу ове књиге, жеља му је била да исти ниво строгости дâ области анализе који је геометрија имала у Еуклидовим Елементима.

Уџбеник под насловом *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique, Premiére partie: Analyse algébrique* објављен је 1821. године у Паризу, у издању *De l'imprimerie royale*[1]. Ова обимна књига (594 странице) садржала је највећи део онога што садрже и савремени уџбеници Математичке анализе (а делом и алгебре). У том тренутку свакако је представљала револуцију у приступу настави ове

[1] `https://books.google.rs/books?id=UrTOKsbDmDwC&pg=PA11&lpg=PA11&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false`

дисциплине, а и данас се сматра једном од најутицајнијих математичких књига. Међутим, у одређеном смислу, била је доста „пре свог времена“. Делимично под утицајем студената који нису могли да прате наставу конципирану на овај начин, управа Политехничке школе је модификовала наставни програм из којег су избачени најтежи делови. Коши је 1829. године објавио нови уџбеник, *Leçons sur le calcul différentiel*, који је у свом уводу, на 18 страница, имао само резиме чињеница из првог уџбеника, неопходних за разумевање диференцијалног рачуна.



COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique, Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

I.re PARTIE. *ANALYSE ALGÉBRIQUE.*

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DEBURE frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.

1821.

Уџбеник *Cours d'analyse* (или *Analyse algébrique*, како су га, према називу првог (и јединог) дела оригинала, неки касније цитирали) није више издаван на француском, изузев што је у целини прештампан у Кошијевим Сабраним делима која је у периоду 1882–1974 објављивала издавачка кућа Gauthiers-Villars. Сем тога, објављени су преводи на немачки (1828. и 1885), руски (1864), шпански (1994) и енглески (2009).

2. Садржај уџбеника

Након уводног одељка у којем су објашњени коришћени појмови и ознаке, основни текст уџбеника подељен је на 12 глава. Њихови нешто дужи наслови довољно описују садржај који је у њима обрађен:

1. О реалним функцијама
2. О бесконачно малим и бесконачно великим величинама и о непрекидности функција. Сингуларне вредности функција у неким посебним случајевима
3. О симетричним и алтернирајућим функцијама. Коришћење функција за решавање једначина првог реда с произвољним бројем непознатих. О хомогеним функцијама
4. Одређивање целих функција на основу одређеног броја посебних вредности које се сматрају познатим. Примене
5. Одређивање непрекидних функција једне променљиве које задовољавају одређене услове
6. О конвергентним и дивергентним (реалним) редовима. Правила конвергенције редова. Сабирање неких конвергентних редова
7. О имагинарним бројевима и њиховим модулима
8. О имагинарним променљивим и функцијама
9. О конвергентним и дивергентним имагинарним редовима. Сабирање неких конвергентних имагинарних редова. Ознаке које се користе за представљање неких имагинарних функција које се појављују при сабирању неких редова
10. О реалним и имагинарним коренима целих рационалних функција једне променљиве. Алгебарско и тригонометријско решавање неких једначина
11. Растављање рационалних функција
12. О рекурентним редовима

Даље следе разне допуне основном материјалу у виду девет прилично опширних напомена („нота“). Неке од обрађених тема су: својства неједнакости (укључујући познати Кошијев доказ неједнакости између аритметичке и геометријске средине коришћењем регресивне индукције); нумеричко решавање једначина; Лагранжова интерполациона формула; двоструки редови; бесконачни производи.

3. Коментари

Са гледишта заснивања основних појмова анализе свакако је најинтересантнија друга глава у којој су обрађени гранична вредност и непрекидност[2]. Најпре се уводе појмови бесконачно малих и бесконачно великих величина. На пример, каже се да је нека променљива величина *бесконачно мала* ако њена апсолутна вредност неограничено опада (тј. та вредност постаје мања од сваког унапред датог позитивног броја) када су вредности независно променљиве довољно близу тачки којој та променљива тежи (Коши користи синтагму „величина коначно узима стално мању апсолутну вредност“). Затим се расправља о упоређивању бесконачно малих и бесконачно великих величина. Притом, не користи се увек оно што данас називамо „ε-δ нотацијом“, али је лако „превести“ Кошијеве термине на тај језик.

[2]Превод на српски ове главе објављен је у оквиру књиге *Заснивање наставе математичке анализе*, Библиотека наставника математике, књига 3, Друштво математичара Србије, 2019.

Наведимо један пример доказа у којем Коши експлицитно примењује „ε-δ језик“ (додуше, и овде је формулација теореме донекле „описна“, али је и њу лако преформулисати).

Теорема 2. *Ако функција $f(x)$ остаје позитивна за велике вредности x, а однос*

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}$$

тежи, кад x неограничено расте, граници k, тада израз

$$[f(x)]^{\frac{1}{x}}$$

тежи истој тој граници.

Доказ. Претпоставимо прво да је величина k коначна (и свакако позитивна), и означимо са ε по жељи мали број. Како, кад вредности x расту, однос

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}$$

тежи граници k, мора постојати такав број h да, чим је x једнако или веће од h, претходни однос стално узима вредност између граница

$$k-\varepsilon, \quad k+\varepsilon.$$

То значи да се, ако са n означимо произвољан цео број, свака од величина

$$\frac{f(h+1)}{f(h)}, \quad \frac{f(h+2)}{f(h+1)}, \quad \ldots, \quad \frac{f(h+n)}{f(h+n-1)},$$

па зато и њихова геометријска средина

$$\left[\frac{f(h+n)}{f(h)}\right]^{\frac{1}{n}},$$

налази између граница $k-\varepsilon$, $k+\varepsilon$. Зато је

$$\left[\frac{f(h+n)}{f(h)}\right]^{\frac{1}{n}} = k+\alpha,$$

где је α величина садржана између граница $-\varepsilon$, $+\varepsilon$. Нека је сада

$$h+n=x.$$

Претходна једнакост се преписује као

$$\left[\frac{f(x)}{f(h)}\right]^{\frac{1}{x-h}} = k+\alpha,$$

па закључујемо да важи:

$$f(x) = f(h)(k+\alpha)^{x-h},$$

(1) $$[f(x)]^{\frac{1}{x}} = [f(h)]^{\frac{1}{x}}(k+\alpha)^{1-\frac{h}{x}}.$$

Даље, да би вредност x неограничено расла, довољно је да неограничено расте вредност h. Претпоставимо зато да је у једнакости (1) h константна величина, а x промењлива величина која тежи ∞. Величине

$$[f(h)]^{\frac{1}{x}}, \quad 1-\frac{h}{x}$$

које се јављају у другом члану, теже граници 1, па сам тај члан тежи граници облика

$$k+\alpha,$$

где је α увек садржано између $-\varepsilon$ и $+\varepsilon$. Зато израз

$$[f(x)]^{\frac{1}{x}}$$

има као границу величину која је између $k-\varepsilon$ и $k+\varepsilon$. Како тај закључак важи колико год мали био број ε, закључујемо да је поменута граница тачно једнака k. Другим речима важи

$$\lim[f(x)]^{\frac{1}{x}} = k = \lim\frac{f(x+1)}{f(x)}.$$

Претпоставимо сада да је величина k бесконачна, дакле, пошто је та величина позитивна, $k=\infty$. Ако означимо са H по жељи велики број, онда можемо да погодно одредимо број h, тако да, чим је x једнако или веће од h, однос

$$\frac{f(x+1)}{f(x)},$$

који тежи граници ∞, буде стално већи од H; на начин сличан претходном, добија се формула

$$\left[\frac{f(h+n)}{f(h)}\right]^{\frac{1}{n}} > H.$$

Ако сада ставимо $h+n=x$, налазимо, слично формули (1), следећу формулу

$$[f(x)]^{\frac{1}{x}} > [f(h)]^{\frac{1}{x}} H^{1-\frac{h}{x}},$$

из које закључујемо да је, кад x тежи граници ∞,

$$\lim[f(x)]^{\frac{1}{x}} > H.$$

> Значи, граница израза $[f(x)]^{\frac{1}{x}}$ је већа од броја H, дакле по жељи велика. Та граница, већа од било ког броја, не може бити друга него позитивна бесконачност.

Приметимо да се управо доказани резултат користи касније, у глави 6, када се показује да се (у данашњим терминима) Даламберов тест конвергенције редова може извести из Кошијевог.

Ево и дефиниције непрекидне функције која се уводи у наставку друге главе. Цитирамо:

> Нека је је $f(x)$ функција променљиве x и претпоставимо да за сваку вредност x између одређених граница та функција има јединствено одређену коначну вредност. Ако, за неку вредност x садржану у поменутим границама, додамо променљивој x као прираштај неку бесконачно малу величину α, сама функција добиће као прираштај разлику
>
> $$f(x+\alpha)-f(x),$$
>
> која зависи истовремено и од нове променљиве α и од вредности x. Кажемо да је $f(x)$ *непрекидна* функција променљиве x у наведеним границама ако, за свако x у тим границама, нумеричка вредност разлике $f(x+\alpha)-f(x)$ неограничено опада са α. Другим речима, $f(x)$ *остаје непрекидна функција променљиве x у датим границама ако, у тим границама, бесконачно мали прираштај променљиве производи увек бесконачно мали прираштај саме функције.*
>
> Још кажемо да је функција $f(x)$, у околини неке одређене вредности променљиве x, непрекидна увек када је непрекидна између неких граница које обухватају вредност која је у питању.

Осим онога што данас зовемо локалним својствима непрекидних функција, наводи се „теорема о међувредности“, у основном тексту са описним доказом, док се прецизан доказ наводи у једној од напомена на крају уџбеника (наравно, својство непрекидности реалне праве се прећутно користи). Слично је поступљено и са Лагранжовом интерполационом формулом која је описно објашњена у четвртој глави, а формално доказана у једном од додатака.

Пета глава посвећена је решавању функционалних једначина

$$\Phi(x+y)=\Phi(x)+\Phi(y), \qquad \Phi(x+y)=\Phi(x)\Phi(y),$$
$$\Phi(xy)=\Phi(x)+\Phi(y), \qquad \Phi(xy)=\Phi(x)\Phi(y)$$

(прву од њих данас обично зовемо Кошијевом).

Теорија (реалних) нумеричких и степених редова представљена је у шестој глави, скоро потпуно на начин као у савременим уџбеницима. Једино и овде, наравно, недостаје прецизно коришћење својства непрекидности скупа реалних бројева, на пример при доказу онога што данас зовемо Кошијевим неопходним и довољним условом конвергенције, као и при доказу да апсолутна конвергенција реда повлачи обичну конвергенцију.

Међутим, овде се појављује једина озбиљнија грешка у читавом уџбенику – тврђење да је збир реда чији су чланови непрекидне функције увек поново непрекидна функција (исто тврђење је у деветој глави „доказано“ и за случај редова с комплексним члановима). Мада неки од коментатора сматрају да је Коши овде имплицитно подразумевао да се ради о равномерној конвергенцији реда, тешко је у то поверовати. Наиме, нигде другде у тексту се не појављује ништа што би указивало да је размишљао у том смеру. На грешку је указао Абел (Niels Henrich Abel, 1802–1829) који је 1826. године објавио контрапример. Појам униформне (равномерне) конвергенције, потребан за формулацију тачног тврђења, први пут се појављује 1838. године у једном раду Гудермана (Christoph Gudermann, 1798–1852), а први га је ефикасно користио Вајерштрас (Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815–1897) око 1841. године (при чему су ти његови радови објављени тек крајем XIX века). Сам Коши је коректну формулацију објавио у једном раду 1853. године.

Главе 7–9 уџбеника посвећене су рачуну с комплексним бројевима – Коши их зове „имагинарни изрази“, а занимљиво је да не користи ознаку i (која је тада већ била у употреби), него пише $\sqrt{-1}$. Најпре су детаљно проучене операције с комплексним бројевима у тригонометријском облику, а затим лимеси и непрекидност функција комплексне променљиве и, посебно, својства полинома од једне или више комплексних променљивих. Својства реалних редова (посебно степених) проширена су на случај редова с комплексним члановима, укључујући теорему о конвергенцији производа (данас бисмо рекли „у Кошијевом смислу“) два реда који апсолутно конвергирају. Затим су наведени развоји у редове најважнијих елементарних функција комплексне променљиве. Даља разрада теорије комплексних функција, укључујући фундаменталне Кошијеве резултате, може се наћи у његовом, раније поменутом, уџбенику из 1829. године.

Десета глава садржи, између осталог, доказ основног става алгебре (како је наведено, „на више места модификованог у односу на Лежандров доказ из његове књиге *Теорија бројева*“). Од специјалних случајева, описано је решавање једначина трећег и четвртог степена. У наредној, једанаестој глави описан је поступак растављања реалне рационалне функције на просте разломке.

Последња, дванаеста глава посвећена је разматрању посебне врсте степених редова код којих између одређеног (фиксираног) броја узастопних коефицијената постоји нека задата линеарна веза – такве редове аутор зове *рекурентним*. На пример, такви су редови добијени развијањем рационалних функција.

4. Закључак

У савременој настави Математичке анализе, Кошијево име се сигурно најчешће помиње – ту су Кошијев низ, Кошијев неопходан и довољан услов конвергенције низа и реда, Коши-Болцанова теорема о међувредности, Кошијева теорема о средњој вредности, Кошијев облик остатка у Тејлоровој формули, Кошијев тест конвергенције реда, Кошијево множење редова, Кошијев проблем за диференцијалне једначине, Кошијева функционална једначина, Кошијева интегрална теорема и теорема о резидууму, као и Коши-Риманове једначине (у теорији функција комплексне промењиве) итд. Нису сви ти појмови и резултати оригинално Кошијеви, али је већини од њих он дао облике у којима их данас познајемо. А један део одговарајућих исказа се први пут (бар колико ми знамо) појавио управо у његовом фундаменталном уџбенику *Курс анализе у Краљевској политехничкој школи*.

Вероватно и важније – у свом приступу излагању анализе, Коши се издвојио од својих савременика ригорозношћу и прецизношћу, дакле нечим што је дотле, од математичких дисциплина, било карактеристично углавном за геометрију. Тиме је поставио стандарде које су морали да примењују сви каснији писци математичких текстова ако су желели да њихови радови буду озбиљно схваћени. Овај уџбеник, први пут издат пре 200 година, означио је прекретницу у начину излагања математичке анализе, па и математике уопште и до данас остао пример свим предавачима и писцима уџбеника.

Математички факултет, Београд, Студентски трг 16
E-mail: kadelbur@matf.bg.ac.rs