НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

Др Асланбек Х. Назиев

МЕТОД ОДРЕЂИВАЊА ЦЕНТРА И ПОЛУПРЕЧНИКА СФЕРЕ ОПИСАНЕ ОКО ПИРАМИДЕ

1. Уводне напомене

Као што је познато, описаном сфером око пирамиде називамо сферу која садржи сва темена те пирамиде. Не постоји таква сфера за сваку пирамиду. Ако она постоји, често се каже *да се око пирамиде може описати сфера.* Добро је позната следећа

Теорема 1.1. *Да би се око пирамиде могла описати сфера, неопходно је и довољно да се око основе те пирамиде може описати кружница. Посебно, око сваке правилне пирамиде и око сваке тростране пирамиде може се описати сфера.*

Размотрићемо проблем *одређивања положаја* центра описане сфере. Теоријски, тај се проблем решава сасвим лако. Тражени центар је тачка која је једнако удаљена од свих темена пирамиде. Познато је да све тачке, једнако удаљене од двеју датих тачака, у простору образују раван која је нормална на дужи који спаја те тачке и садржи њено средиште. Дакле, *центар сфере описане око пирамиде је заједничка тачка свих равни које су нормалне на ивице пирамиде и садрже њихова средишта.*

Међутим, није баш једноставно служити се овим тврђењем, па би требало наћи друге приступе. Најчешће се посматрају пирамиде код којих су све бочне ивице или све бочне стране једнако нагнуте према равни основе. Добро је позната следећа

Теорема 1.2. *За сваку пирамиду следећи услови су међусобно еквивалентни:*

1° *основа пирамиде је тетивни многоугао, а подножје висине пирамиде је центар круга описаног око тог многоугла;*

2° *све бочне ивице пирамиде имају исту дужину;*

3° *све бочне ивице пирамиде су једнако нагнуте према равни основе.*

Ако су испуњени претходни услови, тада се полупречник R сфере описане око пирамиде налази по формули $R = l^2/(2H)$, где је l дужина бочне ивице пирамиде, а H дужина њене висине (в. пример 3.3).

2. Опис метода

Метод који предлажемо не зависи ни од каквих допунских услова на број страница основе, углове између бочних страна или ивица према равни основе и сл. Заснива се само на теореми о пресеку лопте и равни. Подсетимо (в. нпр [1], стр. 59) да важи

Теорема 2.1. *Пресек лопте произвољном равни је круг. Његов центар је подножје нормале конструисане из центра лопте на пресечну раван.*

Посматрајмо пирамиду и њој описану сферу. Пресек равни основе пирамиде са описаном сфером је кружница, описана око основе. Према теореми 2.1, центар те кружнице припада правој нормалној на раван основе која садржи центар сфере. Другачије речено, центар сфере припада правој нормалној на раван основе која садржи центар њене описане кружнице. Краткоће ради, договоримо се да поменуту праву називамо *централном нормалом основе пирамиде.* Тада важи

Теорема 2.2. *Центар сфере описане око пирамиде припада централној нормали њене основе.*

У даљем ћемо ову варијанту теореме 2.1 звати теоремом о пресеку лопте с равни. За коначно одређивање положаја центра описане сфере на тој нормали, као и њеног полупречника применићемо једноставан *метод свођења на кружницу*, који се заснива на следећем.

Посматрајмо раван која садржи централну нормалу основе и висину пирамиде. Та раван сече описану сферу по великој кружници, а круг описан око основе по његовом пречнику. Ако спојимо врх пирамиде с крајевима тог пречника, добијамо троугао који је уписан у велику кружницу сфере. Центар те кружнице је центар описане сфере, а њен полупречник једнак је полупречнику сфере. На тај начин, важи

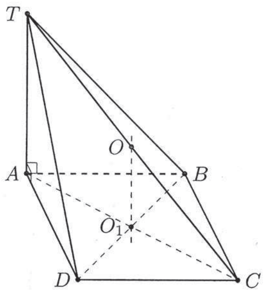
Теорема 2.3 (Основа метода). *Центар и полупречник сфере описане око пирамиде поклапају се са центром и полупречником кружнице која је описана око троугла чија су темена врх пирамиде и крајеви оног пречника кружнице описане око основе пирамиде којем припада подножје висине пирамиде.*

3. Примери

Почнимо с једним сасвим једноставним примером.

Пример 3.1. Нека је основа пирамиде $TABCD$ правоугаоник $ABCD$ у којем је $AB = CD = a$, $AD = BC = b$, и нека је ивица TA нормална на раван основе и има дужину c. Наћи полупречник R сфере описане око пирамиде.

Приметимо да, како је ивица TA нормална на раван основе, она је паралелна централној нормали основе. А како је основа пирамиде правоугаоник, центар основе је тачка O_1 пресека његових дијагонала. Значи да централна нормала основе припада равни троугла TAC. Због тога поменута раван сече описану сферу по великој кружници, тј. по кружници чији се центар и полупречник поклапају с центром и полупречником сфере, при чему је троугао TAC уписан у ту кружницу. Како је тај троугао правоугли, средиште O његове хипотенузе је центар његове описане кружнице, а полупречник кружнице једнак је половини дужине хипотенузе.



Сл. 1

Из троуглова TAC и ADC добијамо да је

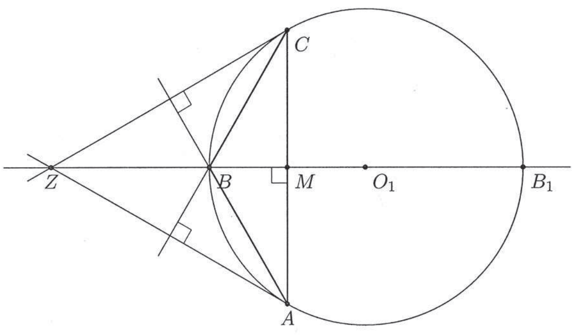
$$TC^2 = TA^2 + AC^2 = TA^2 + AD^2 + DC^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

одакле је $R = \dfrac{1}{2}TC = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Посматрајмо сада један пример „косе“ пирамиде.

Пример 3.2. Основа тетраедра $TABC$ је троугао ABC код којег је $AB = BC = 10\,\mathrm{cm}$, $AC = 10\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$. Висина пирамиде је дужине $10\,\mathrm{cm}$, а подножје јој је ортоцентар основе. Наћи полупречник сфере описане око те пирамиде.

Напомена 3.1. Тетраедар код којег се све висине секу у једној тачки назива се ортоцентричним (в. [3]). Код таквог тетраедра подножје сваке висине је ортоцентар стране на коју је конструисана. За израчунавање полупречника описане сфере таквог тетраедра довољно је посматрати једну његову висину.

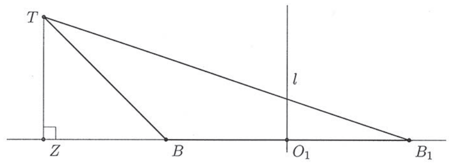


Сл. 2. Троугао, његов ортоцентар и описана кружница

Решење. Користећи косинусну теорему налазимо да је $\measuredangle ABC = 120^\circ$. Значи да се ортоцентар Z основе налази ван троугла, на продужетку тежишне дужи, преко тачке B, тако да се овде заиста ради о „косој“ пирамиди. Раван основе сече описану сферу по кружници описаној око троугла ABC. Угао CAB од 30° је периферијски угао те кружнице, што значи да је њему одговарајућа тетива BC једнака полупречнику кружнице. Дакле, $\rho = 10\,\mathrm{cm}$.

Продужимо странице AB и BC преко B, конструишимо нормале CA_1 и AC_1 на те продужетке и продужимо их до међусобног пресека. Тако добијамо ортоцентар Z датог троугла. Једноставан рачун показује да је $ZB = 10\,\mathrm{cm}$.

Конструишимо раван γ која садржи висину TZ пирамиде и централну нормалу l основе. На основу теореме о пресеку лопте са равни, центар O описане сфере припада правој l. Значи да раван γ сече ту сферу по великој кружници која има исти полупречник R као сфера, а описани круг основе сече по његовом пречнику BB_1. Другим речима, поменута велика кружница је описана око троугла TBB_1, тако да се центар и полупречник кружнице описане око троугла TBB_1 поклапају са центраом и полупречником сфере описане око пирамиде. Одговарајућа конфигурација је представљена на сл. 3.



Сл. 3. Помоћни троугао и централна нормала основе

На датом цртежу је $TZ = ZB = BO_1 = O_1B_1 = 10\,\mathrm{cm}$. Због тога је

$$TB = 10\sqrt{2}\,\mathrm{cm}, \quad TB_1 = 10\sqrt{10}\,\mathrm{cm}, \quad \sin\measuredangle ZB_1T = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

На основу познате формуле за израчунавање полупречника описане кружнице троугла добијамо да је

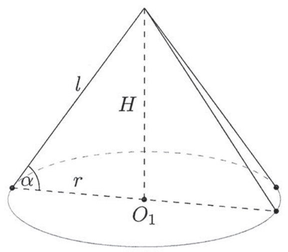
$$R = \frac{TB}{2\sin\measuredangle ZB_1T} = \frac{10\sqrt{2}\,\mathrm{cm}}{2\cdot\frac{\sqrt{10}}{10}} = 10\sqrt{5}\,\mathrm{cm}.$$

Следећи задатак се лако решава коришћењем помоћне обртне фигуре.

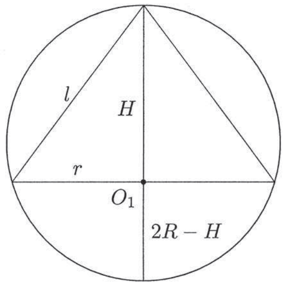
Пример 3.3. Висина правилне 123-стране пирамиде једнака је H, а бочна ивица једнака је l. Наћи полупречник сфере описане око те пирамиде.

Решење. Раван основе пирамиде сече лопту описану око пирамиде по кругу, описаном око 123-угла основе. Посматрајмо купу чија је основа тај круг, а врх јој је врх пирамиде T. Сфера описана око прамиде је описана и око те купе, а висина и изводница купе су уједно висина и бочна ивица пирамиде, респективно. На тај начин, потребно је одредити полупречник сфере описане око купе с изводницом l и висином H. Означимо са O_1 и r центар и полупречник основе купе, а са O и R центар и тражени полупречник описане сфере.

На основу теореме 2.2, центар сфере припада оси купе. Поставимо раван која садржи ту осу и посматрајмо добијени пресек с комбинацијом сфере и купе. Како центар сфере припада оси купе, пресек равни са сфером је кружница полупречника R, а пресек с купом је једнакокраки троугао висине H и крака l. Како је купа уписана у сферу, тај троугао је уписан у добијену кружницу.



Сл. 4. Купа с осним пресеком



Сл. 5. Пресек купе и описане сфере

Користећи теорему о производу одсечака тетива које се секу, добијамо да је $H(2R-H)=r^2$, при чему важи $r^2=l^2-H^2$. Значки да је

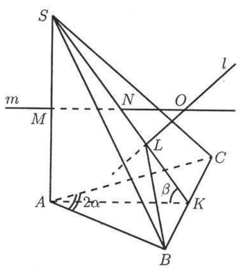
$$H(2R-H)=l^2-H^2, \quad \text{одакле} \quad R=\frac{l^2}{2H},$$

тј. добили смо резултат најављен у теореми 1.2.

Метод који је искоришћен за решавање претходног задатка могао би се назвати *методом помоћне обртне фигуре.* Тим методом се могу решити многи задаци, специјално сви задаци о комбинацији многоуглова и обртних тела из уџбеника [1]. У даљем ћемо размотрити задатке који се не решавају тим методом. Они се решавају на два разна начина, зависно од тога да ли постоји бочна ивица пирамиде која лежи у истој равни с централном нормалом основе или не.

Најпре наводимо пример задатка о пирамиди код које постоји таква ивица. Почнимо једним релативно лаким задатком, који је до скоро сматран тешким и решаван на прилично компликован начин.

Пример 3.4. У тространој пирамиди $SABC$ ивица BC једнака је a, $AB=AC$, ивица SA нормална је на основу ABC пирамиде, угао диедра с ивицом SA једнак је 2α, а угао диедра с ивицом BC једнак је β. Наћи полупречник сфере описане око пирамиде.



Сл. 6

Прво решење [2, с. 485–488]. Како је ивица SA нормална на равни основе, то је

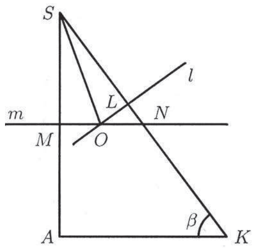
$$\measuredangle BAS=\measuredangle CAS=90^\circ,$$

па је $\measuredangle BAC$ угао диедра с ивицом SA. На тај начин основа пирамиде је једнакораки троугао с углом 2α при врху, а висина пирамиде се поклапа с ивицом SA.

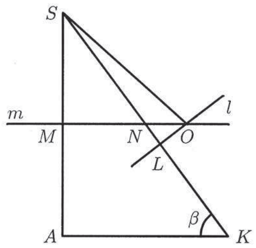
Како су пројекције бочних ивица SB и SC на раван основе пирамиде једнаке, то су и саме те ивице једнаке. Због тога је бочна страна BSC једнакокраки троугао, а подножје његове висине из темена S је средиште K ивице BC. По теореми о три нормале, AK је висина троугла BAC. Одатле је јасно да је $\measuredangle SKA$ угао диедра с ивицом BC, тј. $\measuredangle SKA=\beta$.

Центар описане лопте је продор праве l, која је нормална на раван BSC и садржи центар круга описаног око троугла BSC, кроз раван која садржи средиште ивице AB и нормална је на њој. Права l лежи у равни ASK: заиста, раван BSC садржи праву BC, нормалну на раван ASK, па су равни BCS и ASK нормалне; притом је права l нормална на раван BSC и садржи линију пресека тих равни, тако да она лежи у равни ASK.

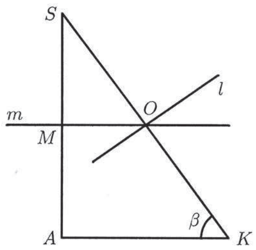
Дакле, центар O лопте припада равни ASK. Представимо ту раван на посебном цртежу. Тачка O је тада пресек праве l и праве m која је нормална на дужи AS и садржи њено средиште. У општем случају, постоје три могућности: праве l и m секу се или унутар или ван троугла ASK или на његовој страници SK (слике 7, 8 и 9). У даљем ћемо показати да се увек реализује ситуација као на слици 8.



Сл. 7



Сл. 8



Сл. 9

Нас интересује полупречник R описане лопте, тј. растојање од O, тачке пресека нормала m и l на странице угла угла KSA, до темена S тог угла.

Израчунајмо најпре дужину SL пројекције траженог растојања на страницу SK троугла KAS. Како су нам у торуглу AKB (сл. 6) познати катета $BK = \frac{1}{2}a$ и $\measuredangle KAB = \alpha$, то је $AK = \frac{1}{2}a\operatorname{ctg}\alpha$. Даље, из троугла KAS имамо $SK = \dfrac{a\operatorname{ctg}\alpha}{2\cos\beta}$. Како је L центар описане кружнице троугла BSC, то је $LS = LB$, а затим из троугла BKL налазимо да је $(SK - SL)^2 + KB^2 = SL^2$, одакле је

$$SL = \frac{a(\operatorname{ctg}^2\alpha + \cos^2\beta)}{4\operatorname{ctg}\alpha\cos\beta}.$$

Приметимо да претходно израчунавање дужине SL ни на који начин не зависи од положаја O описане лопте и посматрајмо слике 7, 8 и 9. Означимо са N тачку пресека праве m са страницом SK. Како је MN средња линија троугла KAS, то је $SN = \frac{1}{2}SK$. Упоређујући дужине дужи SN и SL, лако се види да, за произвољне a, α и β, важи

$$\frac{a\operatorname{ctg}\alpha}{4\cos\beta} < \frac{a(\operatorname{ctg}^2\alpha + \cos\beta)}{4\operatorname{ctg}\alpha\cos\beta}$$

Следи да је $SN < SL$, па се, какве год биле величине a, α и β у пирамиди $SABC$, центар O описане лопте налази ван пирамиде. Дакле, увек се у равни KAS остварује конфигурација приказана на сл. 8.

Посматрајући ту слику, лако налазимо да је $\measuredangle ONL = \beta$, и зато

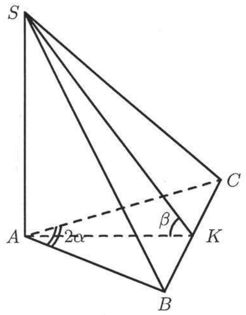
$$LO = NL \operatorname{tg} \beta = (SL - SN) \operatorname{tg} \beta.$$

Замењујући овде добијене вредности за SL и SN, добијамо, после једноставног рачуна да је $LO = \frac{1}{4} a \operatorname{tg} \alpha \sin \beta$. Најзад, из правоуглог троугла OLS налазимо да је

$$R = \sqrt{LO^2 + SL^2} = \frac{a}{2 \sin 2\alpha \cos \beta} \sqrt{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cos^4 \alpha}.$$

Наведимо сада решење овог задатка напред описаним методом свођења на кружницу.

Друго решење. Прва два пасуса су иста као у првом решењу, једино је дат нови цртеж, без детаља који нису неопходни (сл. 10).



Сл. 10

Из правоуглих троуглова SAK и CAK налазимо:

$$SA = AK \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2} BC \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2} a \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \beta.$$

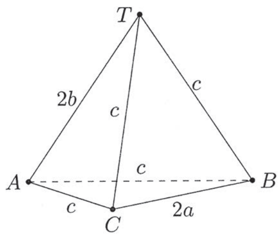
Примењујући у троуглу ABC синусну теорему, налазимо пречник d његове описане кружнице:

$$d = 2r = \frac{BC}{\sin \measuredangle BAC} = \frac{a}{\sin 2\alpha}.$$

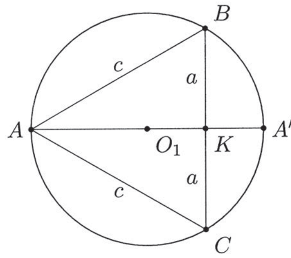
Уочимо онај пречник те кружнице чији је један крај теме A; други крај означимо са A'. По теореми 2.2, центар лопте описане око пирамиде припада правој која садржи средиште дужи AA' и нормална је на раван троугла ABC. На ту раван, по услову задатка, нормална је и ивица SA (која такође садржи тачку A). Дакле, центар O описане лопте припада равни SAA'. Како тачке S, A, A' припадају описаној сфери, њихово растојање од тачке O једнако је полупречнику R те сфере. А како све четири тачке S, A, A' и O припадају једној равни, O и R су, редом, центар и полупречник кружнице описане око троугла SAA'. Тај троугао је правоугли, па је O средиште његове хипотенузе, а R је једнако половини њене дужине. На тај начин, важи

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} \sqrt{SA^2 + AA'^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 2\alpha} + \frac{1}{4} a^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta} \\ &= \frac{a}{2 \sin 2\alpha} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \operatorname{ctg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta \cdot 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{a}{2 \sin 2\alpha} \sqrt{1 + \cos^4 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta}. \end{aligned}$$

(За последњи израз се лако види да је једнак оном што је добијено у претходном решењу.)



Сл. 11. Пирамида



Сл. 12. Основа пирамиде и описана кружница

Пример 3.5. Нека је у пирамиди $TABC$, $BC = 2a$, $TA = 2b$, $TB = TC = AB = AC = c$ (сл. 11). Наћи полупречник R сфере описане око те пирамиде.

Напомена 3.2. Служећи се сликом 13, лако је видети да таква пирамида постоји ако и само ако важи $c^2 > a^2 + b^2$.

Решење. Почнимо стандардно – центар O сфере описане око пирамиде припада централној нормали основе, тј. правој нормалној на раван основе која садржи центар O_1 око ње описане кружнице. Тачка O_1 (сл. 12) припада симетрали дужи BC (у равни основе). А како је $AB = AC$, та симетрала садржи тачку A. На тај начин, тачка O_1 припада полуправој AK, где је K средиште странице BC. Притом тачка A припада кружници, па полуправа AK сече ту кружницу у тачки, рецимо A', за коју је $AA' = d$ (пречник кружнице). Тај пречник d лако налазимо на основу теореме о производу одсечака тетива које се секу:

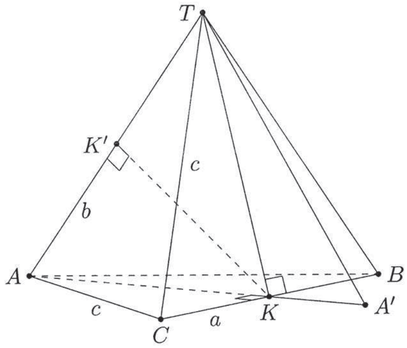
$$\begin{aligned} &KB \cdot KC = AK \cdot KA', && \text{то јест}\\ &a^2 = \sqrt{c^2 - a^2} \cdot (d - \sqrt{c^2 - a^2}), && \text{одакле}\\ &d = \frac{c^2}{\sqrt{c^2 - a^2}}. \end{aligned}$$

Замислимо да је конструисана висина TQ пирамиде. Како су бочне ивице TB и TC једнаке, једнаке су и њихове пројекције QB и QC на раван основе. Дакле, тачка Q је једнако удаљена од тачака B и C и зато припада правој AK.

Дакле, раван која садржи централну нормалу основе и висину пирамиде садржи такође праву AK и ивицу TA. Тој равни припадају тачке T, A и A' које леже на описаној сфери. Такође, припада јој и центар те сфере. Значи да посматрана раван сече сферу по кружници полупречника једнаког полупречнику R описане сфере. Дакле, тражени полупречник описане сфере једнак је полупречнику кружнице описане око троугла TAA'. Остаје да се одреди тај полупречник.

Посматрајмо троугао TAA' (сл. 13). Средиште K дужи BC припада дужи AA' и једнако је удаљено од тачака T и A за дужину $TK = AK = \sqrt{c^2 - a^2}$. Значи да је троугао AKT једнакокрак с врхом K. Нека је K' средиште ивице TA. Тада је KK' тежишна дуж и висина троугла AKT, па је $AK' = b$ и угао $AK'K$ је прав. Дакле,

$$\cos \measuredangle TAA' = \frac{b}{\sqrt{c^2 - a^2}}, \qquad \sin \measuredangle TAA' = \frac{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}{\sqrt{c^2 - a^2}}.$$



Сл. 13. Пирамида и пречник кружнице описане око основе

На основу косинусне теореме важи

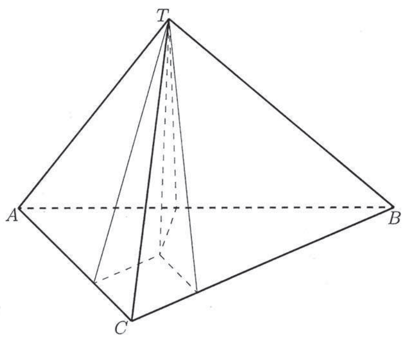
$$\begin{aligned}(TA')^2 &= (2b)^2 + \left(\frac{c^2}{\sqrt{c^2-a^2}}\right)^2 - 2\cdot 2b\cdot \frac{c^2}{\sqrt{c^2-a^2}}\cdot \cos\measuredangle TAA' \\ &= 4b^2 + \frac{c^4}{c^2-a^2} - 4b\cdot\frac{c^2}{\sqrt{c^2-a^2}}\cdot\frac{b}{\sqrt{c^2-a^2}} \\ &= 4b^2 + \frac{c^4}{c^2-a^2} - \frac{4b^2c^2}{c^2-a^2} = \frac{c^4-4a^2b^2}{c^2-a^2},\end{aligned}$$

тако да је $TA' = \sqrt{\dfrac{c^4-4a^2b^2}{c^2-a^2}}$. Одатле, на основу синусне теореме,

$$R = \frac{TA'}{2\sin\measuredangle TAA'} = \sqrt{\frac{c^4-4a^2b^2}{c^2-a^2}} : 2\frac{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}{\sqrt{c^2-a^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c^4-4a^2b^2}{c^2-a^2-b^2}}.$$

У свим досад размотреним примерима постојала је бочна ивица пирамиде која лежи у истој равни са централном нормалом основе. Посматраћемо сада пример пирамиде код које таква бочна ивица не постоји. За коришћење метода који смо изабрали разлика је безначајна.

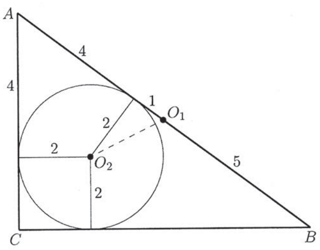
Пример 3.6. Нека је у пирамиди $TABC$, $AC = 6\,\mathrm{cm}$, $BC = 8\,\mathrm{cm}$, $AB = 10\,\mathrm{cm}$ и углови диедара с ивицама AB, BC и CA су једнаки $\mathrm{arctg}\sqrt{5}$ (сл. 14). Наћи полупречник сфере описане око те пирамиде.



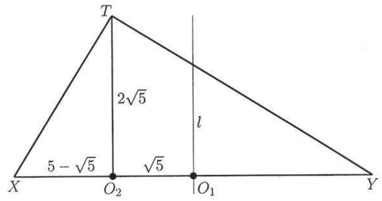
Сл. 14. „Неправа“ пирамида

Решење. Користећи једнакост поменутих углова диедара, стандардним расуђивањем се показује да је подножје висине пирамиде центар O_2 кружнице уписане у троугао ABC. Лако се показује да је у троуглу ABC, $\measuredangle C = 90°$, и налази се да је полупречник његове уписане кружнице $r = 2\,\mathrm{cm}$. Након тога се директно рачуна висина пирамиде $h = r\sqrt{5} = 2\sqrt{5}\,\mathrm{cm}$.

На основу теореме 2.2 центар O описане сфере припада централној нормали основе l, која дакле садржи центар O_1 описане кружнице основе. У овом случају тај центар је средиште хипотенузе, а полупречник је $R_1 = 5\,\mathrm{cm}$. Одатле је $O_1O_2 = \sqrt{5}\,\mathrm{cm}$ (сл. 15).



Сл. 15. Основа пирамиде



Сл. 16. Пресек пирамиде с равни која садржи висину пирамиде (TO_2) и централну нормалу основе (l)

Праве l и TO_2 су паралелне (јер су обе нормалне на раван основе), па оне припадају једној равни. Та раван сече раван основе пирамиде по правој O_1O_2. Означимо са X и Y пресечне тачке те праве са описаном сфером пирамиде. У посматраној равни добијамо троугао XTY (сл. 16) чија сва темена припадају сфери. Како и центар сфере припада тој равни, пресек сфере и равни је велика кружница. Значи да је полупречник описане сфере једнак полупречнику кружнице описане око троугла XTY. Нађимо тај полупречник.

У троуглу XTY једна страница је $XY = 10\,\mathrm{cm}$, а одговарајућа висина је једнака $2\sqrt{5}\,\mathrm{cm}$ и садржи тачку O_2 на страници XY која је од средишта O_1 на растојању $\sqrt{5}\,\mathrm{cm}$. Помоћу синусне теореме налазимо да је полупречник описане кружницеı $R = \dfrac{TY}{2\sin\measuredangle TXY}$. Притом је

$$TY = \sqrt{TO_2^2 + O_2Y^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + (5+\sqrt{5})^2} = \sqrt{10\cdot(5+\sqrt{5})},$$

$$\sin\measuredangle TXY = \frac{TO_2}{TX} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{(2\sqrt{5})^2 + (5-\sqrt{5})^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{10\cdot(5-\sqrt{5})}},$$

тако да је

$$R = \frac{\sqrt{10\cdot(5+\sqrt{5})}\cdot\sqrt{10\cdot(5-\sqrt{5})}}{2\cdot\sqrt{5}} = 10\ (\mathrm{cm}).$$

4. Разматрање општег случаја

Уочимо произвољну пирамиду која има описану сферу. Сматраћемо да су познати:

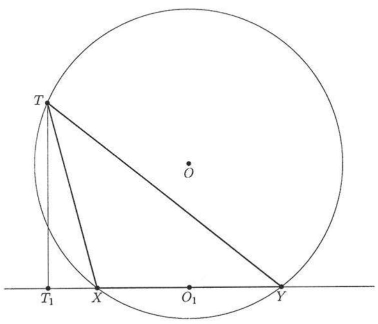
- висина пирамиде H;
- полупречник ρ описане кружнице око основе пирамиде;

- растојање δ између висине пирамиде и централне нормале основе, тј растојање између центра описане кружнице основе и подножја висине пирамиде.

  Уведимо следеће ознаке:
- T – врх пирамиде;
- T_1 – подножје висине пирамиде;
- O_1 – центар описане кружнице основе пирамиде.

Посматрајмо раван која садржи висину пирамиде и централну нормалу њене основе. Означимо са X и Y тачке пресека те равни и кружнице описане око основе и $\alpha = \measuredangle XTY$. Уведимо на правој XY координате[1], узимајући тачку O_1 за координатни почетак, а полуправу O_1Y за позитивну полуосу. Означимо са τ координату тачке T_1. Приметимо да су координате тачака X, O_1, Y једнаке, редом, $-\rho$, 0, ρ. Претпоставимо да је угао α оштар. Тада су могући следећи случајеви:

$$\tau < -\rho; \quad \tau = -\rho; \quad -\rho < \tau < 0; \quad \tau = 0; \quad 0 < \tau < \rho; \quad \tau = \rho; \quad \tau > \rho.$$



Сл. 17. $\tau < -\rho$

Размотримо први (сл. 17). Нека је $\tau < -\rho$. Тада X лежи између T_1 и O_1, а O_1 између X и Y. Значи да је $T_1X = T_1O_1 - XO_1 = \delta - \rho$, а $TY = TO_1 + O_1Y = \delta + \rho$. Из правоуглог троугла TT_1X налазимо:

$$TX = \sqrt{H^2 + (\delta - \rho)^2},$$

$$\sin\alpha = \sin\measuredangle TXT_1 = \frac{H}{\sqrt{H^2 + (\delta-\rho)^2}},$$

а из троугла TT_1Y: $TY = \sqrt{H^2 + (\delta+\rho)^2}$. Примењујући у троуглу TXY синусну теорему, налазимо полупречник његове описане кружнице, тј. тражени полупречник R сфере описане око пирамиде:

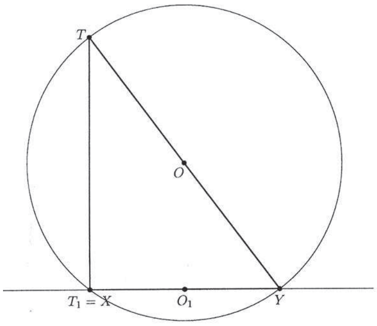
$$R = \frac{TY}{2\sin\alpha} = \frac{\sqrt{H^2 + (\delta+\rho)^2}}{2 \cdot \frac{H}{\sqrt{H^2+(\delta-\rho)^2}}} = \frac{\sqrt{H^2 + (\delta+\rho)^2} \cdot \sqrt{H^2 + (\delta-\rho)^2}}{2H}.$$

Аналогно се разматрају остали случајеви када је $\alpha = \measuredangle XTY$ оштар угао (сл. 18–23). Случајеве правог и тупог угла α читалац може лако да размотри сам (разлике су незнатне и не представљају проблем).

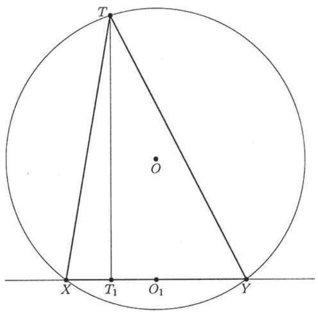
Сада можемо да, знајући полупречник сфере, одредимо положај њеног центра који се, као што занмо, налази на централној нормали основе. А његово растојање Δ од равни основе лако се налази помоћу Питагорине теореме и једнако је $\sqrt{R^2 - \rho^2}$. Након једноставног, али донекле гломазног рачуна добија се да је

$$\Delta = \frac{H^2 + \delta^2 - \rho^2}{2H}.$$

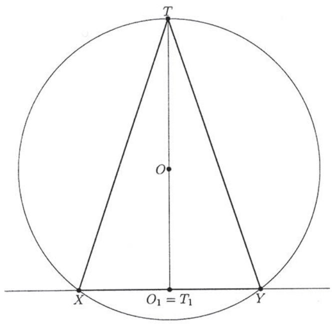
[1] Оне се уводе само ради разликовања случајева који се могу појавити



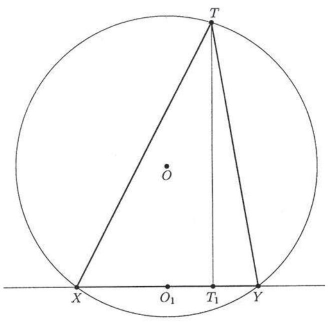
Сл. 18. $\tau = -\rho$



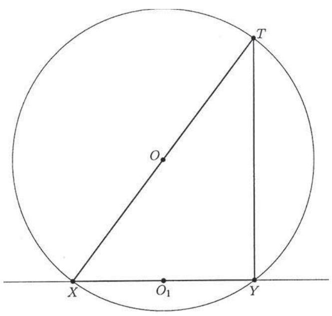
Сл. 19. $-\rho < \tau < 0$



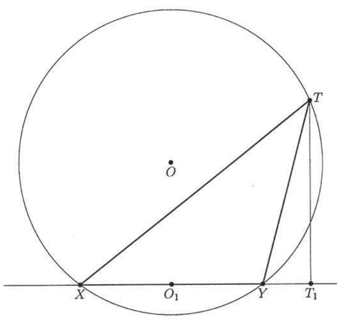
Сл. 20. $\tau = 0$



Сл. 21. $0 < \tau < \rho$



Сл. 22. $\tau = \rho$



Сл. 23. $\tau > \rho$

На тај начин, важи

Теорема 4.1 (Основни резултат чланка). *Нека је дата произвољна пирамида која има описану сферу. Нека је H висина пирамиде, ρ полупречник кружнице описане око њене основе и d растојање између висине пирамиде и централне нормале њене основе. Тада се центар описане сфере налази на* *централној нормали основе на растојању*

$$\Delta = \frac{H^2 + \delta^2 - \rho^2}{2H}$$

од равни основе, а полупречник сфере је једнак

$$R = \frac{\sqrt{H^2 + (\delta + \rho)^2} \cdot \sqrt{H^2 + (\delta - \rho)^2}}{2H}. \tag{4.1}$$

У специјалном случају када је $\delta = 0$, тј. када се врх пирамиде пројектује у центар основе (такве пирамиде се некад зову *праве*), добијамо да је

$$R = \frac{H^2 + \rho^2}{2H}.$$

Како је у том случају $H^2 + \rho^2$ једнако квадрату (заједничке) дужине l бочних ивица пирамиде, добијамо добро познати резултат $R = l^2/(2H)$ наведен у теореми 1.2.

Напомена 4.1. Формула (4.1) даје експлицитан израз за полупречник R. У пракси је, међутим, често лакше најпре наћи R^2:

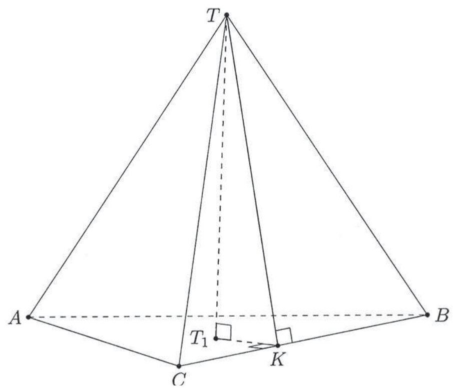
$$R^2 = \frac{H^2}{4} + \frac{\rho^2 + \delta^2}{2} + \frac{(\rho^2 - \delta^2)^2}{4H^2}. \tag{4.2}$$

Формула (4.2) је погоднија за рачун од формуле (4.1) јер се у њој помоћне величине H, ρ, δ јављају на другом степену, па се резултат добија без коришћења квадратних ирационалности.

5. Примена теореме 4.1

За примену последњег резултата неопходно је одредити висину пирамиде и њено растојање од централне нормале основе. А за то се мора одредити подножје висине пирамиде. Покажимо како се то у једном случају може урадити.

Посматрајмо произвољну тространу пирамиду $TABC$ с врхом T и висином TT_1 (сл. 24). Конструишимо нормалу T_1K на било коју ивицу основе пирамиде. На основу теореме о три нормале, дуж TK је висина бочне стране пирамиде. Ако ово поновимо за сваку страну пирамиде, добијамо да је подножје висине пирамиде тачка пресека пројекција свих висина бочних страна пирамиде на њену основу. Искористимо ову чињеницу за налажење висине пирамиде и одређивање положаја њеног подножја. Покажимо како се то може урадити на конкретном, помало неочигледном примеру.



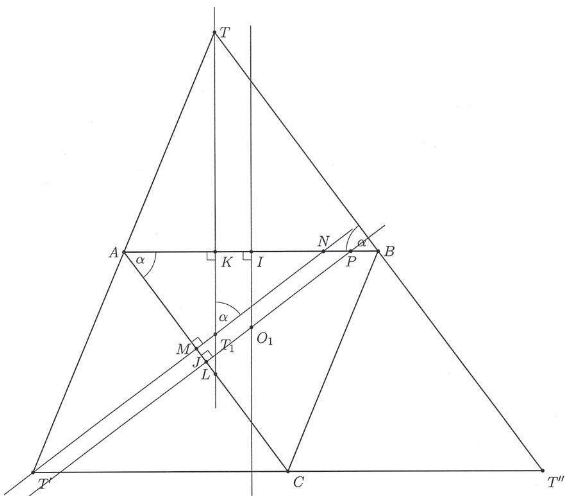
Сл. 24. Пирамида, њена висина, висина бочне стране и њена пројекција на основу пирамиде

Пример 5.1. Наћи висину и њено подножје за пирамиду чије су све стране Херонови троуглови (тј. имају странице дужине 13, 14, 15 јединица).

Напомена 5.1. Тространа пирамида чије су све стране подударне назива се једнакостраним тетраедром или дисфеноидом. Такви тетраедри су добро проучени (в. [4]). Специјално, познато је да је полупречник сфере описане око дисфеноида с ивицама дужине h, k, l једнак

$$\sqrt{\frac{h^2+k^2+l^2}{8}}.$$

Решићемо овај задатак помоћу теореме 4.1 не користећи теорију дисфеноида.



Сл. 25. Мрежа пирамиде; налажење подножја висине пирамиде

Решење. Сва разматрања погодно је спровести на мрежи пирамиде. Нека је ABC основа пирамиде, а TAB, $T'AC$ и $T''BC$ троуглови у равни основе који представљају „оборене“ бочне стране пирамиде (сл. 25). Нека је K подножје висине бочне стране TAB. Кроз тачку K на површи пирамиде пролазе две праве, нормалне на AB: једна у равни бочне стране, друга у равни основе. На мрежи се те две праве „сливају“ у једну јер садрже исту тачку и нормалне су на исту праву. Због тога се лако налази пресек нормале на AB у равни основе с правом AC: конструишимо кроз T нормалу на AB у продужимо је на мрежи до пресека с правом AC.

Ако исто учинимо с нормалом на AC, налазимо подножје висине пирамиде као пресек две описане нормале. Осим тога, добијамо три слична правоугла троугла AKL, AMN и NKT_1, а посматрајући те троуглове лако се налазе вредности неопходних величина. Како тај планиметријски задатак није тежак, описаћемо га укратко.

У $\triangle TAB$:

$$TA = 13, \quad AB = 14, \quad TB = 15, \quad TK \perp AB.$$

Одатле је:

$$AK = 5, \quad KB = 9, \quad TK = 12, \quad \sin\alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos\alpha = \frac{3}{5}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4},$$
$$\rho = \frac{BC}{2\sin\alpha} = \frac{13}{2\cdot\frac{4}{5}} = \frac{65}{8}.$$

У $\triangle T'AC$ (страни TAC, „обореној“ у раван основе):

$$T'A = 13, \quad T'C = 14, \quad AC = 15, \quad TM \perp AC.$$

Стављајући $AM = x$ добијамо да је $MC = 15 - x$. Из правоуглих троуглова $T'AM$ и $T'CM$ се добија једнакост $13^2 - x^2 = 14^2 - (15-x)^2$, чијим решавањем налазимо да је $AM = x = \frac{33}{5}$. Значи,

$$AN = \frac{AM}{\cos\alpha} = \frac{33/5}{3/5} = 11, \quad NK = 6.$$

Нека су I и J средишта ивица AB и AC. Конструишимо кроз њих нормале на AB и AC, респективно, и означимо са O_1 њихов пресек. То је центар кружнице описане око троугла ABC. Означимо са P пресечну тачку правих JO_1 и AB. Имамо:

$$AJ = \frac{15}{2},\ AP = \frac{AJ}{\cos\alpha} = \frac{15}{2\cdot\frac{3}{5}} = \frac{25}{2},\ IP = \frac{25}{2} - 7 = \frac{11}{2},$$
$$IO_1 = IP\cdot\operatorname{ctg}\alpha = \frac{11}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{33}{8}.$$

Из $\triangle NKT_1$: $T_1K = NK\cdot\operatorname{ctg}\alpha = \frac{9}{2}$. На тај начин, подножје T_1 висине пирамиде се налази на нормали на страницу AB основе, која садржи подножје K висине бочне стране TAB, и на растојању је од K за $T_1K = \frac{9}{2}$. Сада се квадрат висине $H = TT_1$ налази из $\triangle TKT_1$:

$$H^2 = (TT_1)^2 = TK^2 - T_1K^2 = 12^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}\cdot 55.$$

А величина $\delta = O_1T_1$ се налази као хипотенуза правоуглог троугла O_1T_1Q, где је Q подножје нормале, конструисане из O_1 на праву KT_1. У том троуглу је $O_1Q = IK = 2$, а $T_1Q = KT_1 - IO_1 = \frac{36}{8} - \frac{33}{8} = \frac{3}{8}$. По Питагориној теореми је

$$\delta^2 = O_1T_1^2 = O_1Q^2 + QT_1^2 = 2^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{265}{8^2}.$$

Резимирајући нађено:

$$\frac{H^2}{4} = \frac{9}{16}\cdot 55; \quad \rho^2 = \frac{65^2}{64}; \quad \delta^2 = \frac{265}{64};$$
$$\frac{\rho^2+\delta^2}{2} = \frac{65^2+265}{2\cdot 64} = \cdots = \frac{5\cdot 449}{64};$$
$$\frac{(\rho^2-\delta^2)^2}{4H^2} = \frac{(65^2-265)^2}{64^2\cdot 4\cdot\frac{9}{4}\cdot 55} = \cdots = \frac{5\cdot 9\cdot 11}{64}.$$

Користећи формулу (4.2), налазимо:

$$R^2 = \frac{9}{16} \cdot 55 + \frac{5 \cdot 449}{64} + \frac{5 \cdot 9 \cdot 11}{64} = \frac{295}{4}, \qquad R = \frac{\sqrt{295}}{2}.$$

Напомена 5.2. Како је у посматраном случају $h^2 + k^2 + l^2 = 13^2 + 14^2 + 15^2 = 590$, добијени резултат се поклапа са оним добијеним као последица теорије дисфеноида.

Напомена 5.3. Скрећемо пажњу да то да је формула (4.2) омогућила да се резултат у случају овако „неправилне“ пирамиде добијен без коришћења квадратних ирационалности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Погорелов, *Геометрия*, 10–11, 13-е изд., Просвещение, 2014.

[2] Ф. В. Дорфеев, М. К. Потапов, Н. Х. Розов, *Пособие по математике для поступающих в вузы*, Наука, Москва, 1976.

[3] В. В. Прасолов, *Задачи по стереометрии*, МЦНМО, Москва, 2016.

[4] H. C. Rajpoot, *Mathematical analysis of disphenoid (isosceles tetrahedron)*, Retrieved from `https://notionpress.com/author/HarishChandraRajpoot`, (Date: 22.08.2021).

Рјазански универзитет, Русија

E-mail: `a.naziev@365.rsu.edu.ru`