Петар Свирчевић

ГЕНЕРИСАЊЕ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ИДЕНТИТЕТА ПОМОЋУ ИЗВОДА

У овом чланку ћемо, користећи изводе, извести неке тригонометријске идентитете и показати неке њихове примене, као и доказ Питагорине теореме помоћу извода.

Добро су позната следећа четири идентитета који се могу извести на више начина

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta, \tag{1,2}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta. \tag{3,4}$$

Илустрације ради, изведимо идентитет (4) коришћењем скаларног производа вектора. Нека су задати јединични вектори (с почетком у координатном почетку и крајем на јединичној кружници)

$$\vec{a} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha, \quad \vec{b} = \vec{i}\cos\beta + \vec{j}\sin\beta,$$

где је, одређености ради, $\alpha > \beta$. На основу дефиниције скаларног производа следи

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 1\cos(\alpha-\beta). \tag{5}$$

С друге стране, на основу правила скаларног множења вектора задатих координатама, добија се

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \tag{6}$$

Из релација (5) и (6) непосредно следи жељена формула

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \tag{4}$$

Користећи парност функције косинус и непарност функције синус, одатле се лако изводи и формула (3).

Из формула (1)–(4) се лако изводе и формуле

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Градиво везано за изводе се углавном обрађује у четвртом разреду средње школе. Показаћемо сада примену извода код извођења тригонометријских идентитета. Неће бити потребно да формуално записујемо ознаке извода, тј. нећемо писати, на пример, $(\cos\alpha)' = -\sin\alpha$, већ ћемо то само вербално исказивати („извод од $\cos\alpha$ једнак је $-\sin\alpha$“).

Дакле, ако диференцирамо идентитет (4) по α, добићемо нови идентитет

$$-\sin(\alpha-\beta) = -\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

па ако га помножимо с -1, добијамо идентитет (2) (исто се добија диференцирањем релације (4) по β). Даље, (1) добијамо из (2) ако искористимо поново парност функције косинус и непарност функције синус. Тиме смо, користећи између осталог изводе, доказали сва четири основна идентитета (1)–(4). За $\alpha = \beta$ одатле следе познате формуле

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Прелазећи на уопштења, применимо формулу (3) на трином $\alpha+\beta+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$, па после краћег рачуна добијамо важну и једноставну формулу

(7)
$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma.$$

Из ове се формуле променом предзнака сабирака или диференцирањем могу извести и друге формуле. Тако се, на пример, променом знака другог и трећег сабирка добија

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta+\gamma)&\\ &= \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma.\\ \cos(\alpha-\beta-\gamma)&\\ &= \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma + \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma.\end{aligned}$$

Задатак 1. Доказати да је вредност израза

$$\begin{aligned}&\cos 11^\circ\cos 18^\circ\cos 31^\circ - \cos 11^\circ\sin 18^\circ\sin 31^\circ\\ &\qquad - \sin 11^\circ\cos 18^\circ\sin 31^\circ - \sin 11^\circ\sin 18^\circ\cos 31^\circ\end{aligned}$$

рационалан број.

Решење. Заменом $\alpha = 11^\circ$, $\beta = 18^\circ$ и $\gamma = 31^\circ$ у формулу (7) се добија да је вредност датог израза једнака $\cos 60^\circ = 0{,}5$, дакле рационалан број. То је занимљиво јер је сваки од четири сабирка, као и сваки од фактора тих сабирака, трансцендентам број.

Ако формулу (7) диференцирамо по α и обе стране помножимо с -1, добијамо

(8)
$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta+\gamma)&\\ &= -\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.\end{aligned}$$

И из ове формуле, ако је узмемо као основну, лако се генеришу нове формуле мењањем предзнака сабирака α, β, γ.

Стављајући $\alpha=\beta=\gamma$, из формуле (7) се добија

$$\cos 3\alpha=\cos^3\alpha-3\sin^2\alpha\cos\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha. \tag{9}$$

Аналогно се из (8) добија да је

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha. \tag{10}$$

Наравно, формулу (10) смо могли добити и диференцирањем из (9). Из та два идентитета се лако добија и $\operatorname{tg}3\alpha=\dfrac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Као што је познато, из адиционих формула (1)–(4) се лако изводе формуле о претварању производа тригонометријских функција у збир. Наиме, сабирањем једнакости (3) и (4), након сређивања се добија

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)].$$

Ако сад тај идентитет диференцирамо по α и помножимо с -1, добијамо

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)],$$

а ако ову релацију диференцирамо по β и средимо, добијамо

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

Аналогним поступком, из једнакости (7) се варирањем предзнака у суми $\alpha+\beta+\gamma$ и сабирањем добијених једнакости добија следећа формула трансформације

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$
$$=\frac{1}{4}[\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos(-\alpha+\beta+\gamma)+\cos(\alpha-\beta+\gamma)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)],$$

коју ћемо сматрати основном. Погодним диференцирањем овог идентитета добијамо и следеће везе:

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$
$$=\frac{1}{4}[-\sin(\alpha+\beta+\gamma)+\sin(-\alpha+\beta+\gamma)+\sin(\alpha-\beta+\gamma)+\sin(\alpha+\beta-\gamma)],$$
$$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma$$
$$=\frac{1}{4}[-\sin(\alpha+\beta+\gamma)-\sin(-\alpha+\beta+\gamma)+\sin(\alpha-\beta+\gamma)+\sin(\alpha+\beta-\gamma)],$$
$$\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$$
$$=\frac{1}{4}[-\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos(-\alpha+\beta+\gamma)+\cos(\alpha-\beta+\gamma)-\cos(\alpha+\beta-\gamma)].$$

Напомена 1.. Могле би се изводити и формуле за $\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$, $\cos(\alpha-\beta+\gamma+\delta)$, $\ldots$, као и претварање производа $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta$, $\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta, \ldots$ у збирове, ако се укаже потреба.

Задатак 2. Ако је $0 \leqslant \cos\dfrac{x}{2^n} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, доказати да је

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}=\operatorname{ctg}x-\frac{x}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}.$$

Решење. Ако узастопно примењујемо формулу $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, добијамо $\sin x = 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = 2^2\sin\dfrac{x}{2^2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cos\dfrac{x}{2} = \cdots = 2^n\sin\dfrac{x}{2^n}\cos\dfrac{x}{2^n}\cdot\ldots\cdot\cos\dfrac{x}{2^2}\cos\dfrac{x}{2}$, а одатле је

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}.$$

Ако сада ту једнакост логаритмујемо, добијамо

$$\ln\cos\frac{x}{2}+\ln\cos\frac{x}{2^2}+\cdots+\ln\cos\frac{x}{2^n}=\ln\sin x-n\ln 2-\ln\sin\frac{x}{2^n}.$$

Сада се директно диференцирањем те једнакости добија једнакост из задатка.

Задатак 3. Доказати да је

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha}.$$

Решење. Ако у идентитету $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos(\alpha+\beta+\gamma)}$ бројилац заменимо из једнакости (8), а именилац из једнакости (7), па затим бројилац и именилац поделимо са $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$, добијамо једнакост из формулације задатка.

Задатак 4. Доказати Питагорину теорему користећи изводе.

Решење [1]. Посматрајмо функцију $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, дату са

$$f(\alpha)=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha.$$

Извод ове функције је $f'(\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha-2\cos\alpha\sin\alpha\equiv 0$, а то значи да је $f(\alpha)=C$ (константа) за све $\alpha\in\mathbf{R}$. Како је за $f(0)=0+1=1$, то је $C=1$, тј.

$$f(\alpha)=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\equiv 1. \tag{11}$$

Ако искористимо дефиниције синуса и косинуса оштрог угла у правоуглом троуглу са катетама a и b и хипотенузом c,

$$\sin\alpha=\frac{a}{c},\quad \cos\alpha=\frac{b}{c},$$

и уврстимо их у једнакост (11), добијамо Питагорину једнакост $a^2+b^2=c^2$.

Напомена 2. На други начин, Питагорину теорему можемо добити и уврштавањем $\alpha = \beta$ у једнакост (4). Може се сматрати да је ово извођење коректно, јер ту теорему нисмо користили при дефиницији и извођењу својстава скаларног производа.

ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Svirčević, *Dokaz Pitagorinog poučka pomoću derivacije*, Matematičko-fizički list 285, Zagreb 2021.

Tehnička škola, Zagreb

E-mail: `petar.svircevic@zg.t-com.hr`