Драгољуб Милошевић, Шефкет Арсланагић

ДВЕ ЗАНИМЉИВЕ НЕЈЕДНАКОСТИ ЗА УГЛОВЕ ТРОУГЛА

У овом раду ћемо дати доказе двеју занимљивих неједнакости троугла које гласе:

$$\frac{2R^2-2Rr-r^2}{4R^2} \leqslant \sum \sin^4\frac{\alpha}{2} \leqslant \frac{4R^2-8Rr+3r^2}{4R^2}, \tag{1}$$

$$\frac{6R^2+2Rr-r^2}{4R^2} \leqslant \sum \cos^4\frac{\alpha}{2} \leqslant \frac{8R^2-4Rr+3r^2}{4R^2}, \tag{2}$$

где су R и r полупречници описане и уписане кружнице троугла ABC, а сумирање се врши по свим унутрашњим угловима троугла.

Најпре ћемо доказати следеће две једнакости:

$$\sum \sin^4\frac{\alpha}{2} = \frac{8R^2+r^2-s^2}{8R^2}, \qquad \sum \cos^4\frac{\alpha}{2} = \frac{(4R+r)^2-s^2}{8R^2}, \tag{3,4}$$

где је s полуобим троугла ABC.

Доказ једнакости (3). Користићемо познате једнакости:

$$\sum \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2R-r}{2R}, \qquad \sum \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2} = \frac{s^2+r^2-8Rr}{16R^2}, \tag{5}$$

где се у другом збиру сумирање врши по свим паровима углова троугла.

Користећи идентитет

$$\Big(\sum \sin^2\frac{\alpha}{2}\Big)^2 = \sum \sin^4\frac{\alpha}{2} + 2\sum \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2},$$

и једнакости (5), добијамо:

$$\begin{aligned}\sum \sin^4\frac{\alpha}{2} &= \Big(\sum \sin^2\frac{\alpha}{2}\Big)^2 - 2\sum \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2} = \Big(\frac{2R-r}{2R}\Big)^2 - 2\cdot\frac{s^2+r^2-8Rr}{16R^2}\\ &= \frac{4R^2-4Rr+r^2}{4R^2} - \frac{s^2+r^2-8Rr}{8R^2} = \frac{8R^2+r^2-s^2}{8R^2}\end{aligned}$$

дакле једнакост (3).

Доказ једнакости (4) се изводи слично коришћењем једнакости

$$\sum \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{4R+r}{2R}, \quad \sum \cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} = \frac{s^2+(4R+r)^2}{16R^2}. \tag{6}$$

Иначе, докази идентитета (5) и (6) могу се наћи у [3, стр. 57].

Доказ неједнакости (1). Због једнакости (3), неједнакост (1) је еквивалентна свакој од следећих неједнакости:

$$\frac{2R^2-2Rr-r^2}{4R^2} \leqslant \frac{8R^2+r^2-s^2}{8R^2} \leqslant \frac{4R^2-8Rr+3r^2}{4R^2},$$
$$4R^2-4Rr-2r^2 \leqslant 8R^2+r^2-s^2 \leqslant 8R^2-16Rr+6r^2,$$
$$16Rr-5r^2 \leqslant s^2 \leqslant 4R^2+4Rr+3r^2, \tag{7}$$

а ово последње је неједнакост 5.9 из [2, стр. 51]. Дакле, неједнакост (1) је тачна. Једнакост у њој важи ако и само ако је $R=2r$, што је испуњено ако и само ако је $\alpha=\beta=\gamma$, тј. ако је у питању једнакостранични троугао.

Неједнакост (2) се доказује слично, коришћењем неједнакости (4). И овде једнакост важи ако и само ако је у питању једнакостранични троугао.

Потпуности ради, наводимо и доказ неједнакости (7).

Користићемо познате обрасце

$$|IH|^2 = 2r^2-4R^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma, \quad |IG|^2 = r^2-\frac{1}{12}\left(\sum a\right)^2+\frac{2}{9}\sum a^2, \tag{8,9}$$

где су H, G и I, редом, ортоцентар, тежиште и центар уписане кружнице троугла ABC. Из познатих једнакости

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma = 2(1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma),$$
$$a^2+b^2+c^2 = 2s^2-2r^2-8Rr$$

и синусне теореме добијамо да важи

$$4R^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}\left(\sum a\right)^2-(2R+r)^2.$$

Сада из (8) следи

$$|IH|^2 = 3r^2+4Rr+4R^2-\frac{1}{4}\left(\sum a\right)^2,$$

па због $|IH|^2 \geqslant 0$ важи

$$3r^2+4Rr+4R^2 = \frac{1}{4}\cdot 4s^2 \geqslant 0, \quad \text{одакле је} \quad s^2 \leqslant 4R^2+4Rr+3r^2,$$

што је десна неједнакост у (7).

За доказ леве неједнакости (7), најпре користећи једнакости

$$a^2+b^2+c^2 = 2s^2-2r^2-8Rr \quad \text{и} \quad ab+bc+ca = s^2+r^2+4Rr,$$

изводимо једнакост $\left(\sum a\right)^2-2\sum a^2+4r(R+r)$, а одатле, на основу (9),

$$36|IG|^2 = \left(\sum a\right)^2+20r^2-64Rr.$$

Како је $|IG|^2 \geqslant 0$, следе, редом, неједнакости:

$$\left(\sum a\right)^2 \geqslant 64Rr - 20r^2 \quad \text{и} \quad 4s^2 \geqslant 64Rr - 20r^2,$$

што, после скраћивања даје леву страну неједнакости (7).

Напомена. Докази једнакости (8) и (9) се могу наћи у [1, стр. 432–443].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.

[2] O. Bottema, R. Ž. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.

[3] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, V. Volenec, *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Bostom/London, 1989.

Д.М.: 17. НОУ дивизије 43, Горњи Милановац

E-mail: dramil947@gmail.com

Ш.А.: Природно-математички факултет, Универзитет у Сарајеву, Босна и Херцеговина

E-mail: asefket@pmf.unsa.ba