Др Милан Живановић

ЛОГАРИТМИ У ЗАДАЦИМА СА ОЛИМПИЈАДА „ФИЗТЕХ“

Физичко-математичке олимпијаде „ФИЗТЕХ“ организују се у Русији више од 30 година. У њима учествују ученици од 9. до 11. разреда, одвојено из математике и физике, а у новије време и из биологије. Квалификације се проводе кроз онлајн циклусе, а финално надметање се организује уживо и симултано у неколико градова. Такмичењу је последњих година приступило и неколико држава бившег СССР-а. Осим самог такмичења, Московски физичко-технички институт (МФТИ) проводи и припреме за ову захтевну олимпијаду, а награђени такмичари имају право директног уписа на овај факултет. Тај систем образовања изнедрио је неколико лауреата светских математичких награда, Нобелових награда из физике и хемије, као и најплаћеније руске ИТ стручњаке.

У даљем тексту ће бити представљени задаци у вези логаритамских једначина, неједначина и њихових система са завршних такмичења из математике за ученике 11. разреда.

1. (2007) Решити једначину $2\log_3(x^2-4)+3\sqrt{\log_3(x+2)^2}-\log_3(x-2)^2=4$.

Решење. Једначина је дефинисана за $x\in(-\infty,2-\sqrt{3}]\cup(2,+\infty)$ и на том скупу је еквивалентна са $\log_3(x+2)^2+3\sqrt{\log_3(x+2)^2}-4=0$. Сменом $t=\sqrt{\log_3(x+2)^2}\geqslant 0$ добијамо $t^2+3t-4=0$, па је $t=1$. Даље је $(x+2)^2=3$, односно $x_{1,2}=-2\pm\sqrt{3}$. Услов дефинисаности задовољава само $x_2=-2-\sqrt{3}$, па је то једино решење једначине.

2. (2008) Решити неједначину $\log_{\frac{2-x}{1-x}}(4-x)\leqslant 2$.

Решење. Из услова дефинисаности неједначине $0<\dfrac{2-x}{1-x}\neq 1$ и $4-x>0$ добијамо $x\in(-\infty,1)\cup(2,4)$. Једначину прво напишемо у облику

$$\log_{\frac{2-x}{1-x}}(4-x)-\log_{\frac{2-x}{1-x}}\left(\frac{2-x}{1-x}\right)^2\leqslant 0,$$

па је методом рационализације[1] сведемо на облик

$$\left(\frac{2-x}{1-x}-1\right)\left(4-x-\left(\frac{2-x}{1-x}\right)^2\right)\leqslant 0,$$

[1] Видети [1].

односно $\dfrac{x(x^2-5x+5)}{(x-1)^3} \leqslant 0$. Нека је $A(x) = \dfrac{x(x^2-5x+5)}{(x-1)^3}$. Нуле бројиоца су $x_1 = 0$ и $x_{2,3} = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$, а имениоца $x_4 = 1$. Стандардним поступком решавања рационалне неједначине $A(x) \leqslant 0$ налазимо њена решења
$x \in [0,1] \cup \Big[\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\Big]$, што у пресеку са доменом даје решење дате неједначине $x \in [0,1) \cup \Big(2, \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\Big]$.

3. (2009) Решити систем једначина

$$\log_{2x+1}(4x^2-y^2+8x-6y-4) = 2 \ \wedge \ \log_{y+2}(y^2+6y-x+14) = 2.$$

Решење. Систем је (на свом домену) еквивалентан са

$$4x^2-y^2+8x-6y-4 = 4x^2+4x+1 \ \wedge \ y^2+6y-x+14 = y^2+4y+4,$$

однонсо

$$-y^2-6y = -4x+5 \ \wedge \ -x = -2y-10.$$

Елиминацијом x из последњег система добија се једначина $y^2-2y-35=0$. Решење $y=-5$ не задовољава услов дефинисаности логаритма у другој једначини, јер је тада у основи $y+2=-3$. За $y=7$ је $x=24$ и оба логаритма су дефинисана, па је једино решење система пар $(24,7)$.

4. (2010) Решити систем једначина

$$\log_x(y+1) = 4\log_{x+2}\sqrt{y-1} \ \wedge \ \log_{y-1}(x+2) = \log_x \frac{x^3}{y+1}.$$

Решење. Систем је дефинисан за $0 < x \neq 1$ и $1 < y \neq 2$. Тада је он еквивалентан са

$$\log_x(y+1) = \frac{2}{\log_{y-1}(x+2)} \ \wedge \ \log_{y-1}(x+2) = 3 - \log_x(y+1).$$

Увођењем смена $u = \log_x(y+1)$ и $v = \log_{y-1}(x+2)$ добијамо систем $uv = 2 \wedge u+v = 3$. Одавде је $u=1$, $v=2$ или $u=2$, $v=1$.

У првом случају је $y+1 = x \wedge x+2 = (y-1)^2$. Решење које задовољава услов дефинисаности је пар $\Big(\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\Big)$.

У другом случају имамо $y+1 = x^2 \wedge x+2 = y-1$, а решење које задовољава услов дефинисаности је $\Big(\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}, \dfrac{7+\sqrt{17}}{2}\Big)$.

5. (2011) Решити неједначину $\dfrac{2}{\log_{x+\frac{5}{8}}\Big(\dfrac{1}{2}-x\Big)} \leqslant 1$.

Решење. На домену $x \in \left(-\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right) \cup \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right)$ неједначина је еквивалентна са $2\log_{\frac{1}{2}-x}\left(x+\frac{5}{8}\right) \leqslant 1$, односно $\log_{\frac{1}{2}-x}\left(x+\frac{5}{8}\right)^2 - \log_{\frac{1}{2}-x}\left(\frac{1}{2}-x\right) \leqslant 0$. Применом методе рационализације добија се еквивалентна неједначина

$$\left(\frac{1}{2}-x-1\right)\left(\left(x+\frac{5}{8}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}-x\right)\right) \leqslant 0,$$

тј. $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{9}{4}x-\frac{7}{64}\right) \geqslant 0$. На крају се добија решење

$$x \in \left(-\frac{5}{8}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left[-\frac{9}{8}+\sqrt{\frac{11}{8}}, \frac{3}{8}\right) \cup \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right).$$

6. (2012) Решити једначину $\log_{\operatorname{ctg} x}(\operatorname{tg} x - 2) + \log_{\operatorname{tg} x - 2}\sqrt{\operatorname{ctg} x} = \frac{3}{2}$.

Решење. Једначина је дефинисана ако је $2 < \operatorname{tg} x \neq 3$, Увођењем смене $t = \log_{\operatorname{ctg} x}(\operatorname{tg} x - 2)$ једначина се своди на $t + \frac{1}{2t} = \frac{3}{2}$, а њена решења су $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1}{2}$.

Из првог решења добија се једначина $\operatorname{tg} x - 2 = \operatorname{ctg} x$ која даје решења $\operatorname{tg} x = 1 \pm \sqrt{2}$, а услов дефинисаности задовољава $\operatorname{tg} x = 1+\sqrt{2}$, тј. $x = \operatorname{arctg}(1+\sqrt{2}) + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Из другог решења добијамо једначину $\operatorname{tg} x - 2 = \sqrt{\operatorname{ctg} x}$ која се после квадрирања и једноставних трансформација своди на симетричну једначину $\operatorname{tg}^3 x - 4\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x - 1 = 0$. Њено решење које задовољава услове дефинисаности је $x = \operatorname{arctg}\frac{3+\sqrt{5}}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

7. (2013) Решити једначину $\log_{3^{x-1}}(x^2-11x+19) + \log_{27^{x-1}} x^3 = \frac{2}{x-1}$.

Решење. Под условима дефинисаности $0 < x \neq 1$ једначина је еквивалентна свакој од наредних:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{x-1}\log_3(x^2-11x+19) + \frac{3}{3(x-1)}\log_3 x = \frac{2}{x-1},\\
\log_3(x^2-11x+19) + \log_3 x = \log_3 9,\\
x^3 - 11x^2 + 19x - 9 = 0,\\
(x-1)^2(x-9) = 0.
\end{gathered}$$

Кубна једначина има решења $x_{1,2} = 1$, $x_3 = 9$, а услов дефинисаности задовољава $x_3 = 9$.

8. (2014) Решити једначину $\log_{2^{x+1}+1}(3x^2+4x-3) = \log_{10-2^{2-x}}(3x^2+4x-3)$.

Решење. На домену дефинисаности дата једначина еквивалентна је дисјункцији

$$2^{x+1} + 1 = 10 - 2^{2-x} \quad \vee \quad 3x^2 + 4x - 3 = 1.$$

Из прве једначине добијамо $x = -1$ или $x = 2$, а из друге $x = -2$ или $x = \dfrac{2}{3}$. Услов дефинисаности задовољавају $x_1 = 2$ и $x_2 = \dfrac{2}{3}$.

9. (2015) Решити једначину $\left(\dfrac{3x}{2}\right)^{\log_3 8x} = \dfrac{x^7}{8}$.

Решење. Једначина је дефинисана за $x > 0$. После логаритмовања за основу 3 добијамо $\log_3 8x \cdot \log_3 \dfrac{3x}{2} = \log_3 \dfrac{x^7}{8}$, што се може записати као

$$(\log_3 x + 3\log_3 2)(1 + \log_3 x - \log_3 2) = 7\log_3 x - 3\log_3 2.$$

Ради прегледнијег записивања уведимо ознаке $\log_3 x = y$, $\log_3 2 = a$ и после сређивања добијемо $y^2 + (2a-6)y - 3a^2 + 6a = 0$. Решења ове квадратне једначине су $y_1 = a$, $y_2 = 6 - 3a$. Из првог имамо $\log_3 x = \log_3 2$, па је једно решење полазне једначине $x_1 = 2$. Из другог решења је $\log_3 x = 6 - 3\log_3 2$, па је $x_2 = \dfrac{729}{8}$.

10. (2016) Решити неједначину $\log_{\frac{x^2-5}{2x-6}} \dfrac{(x^2-5)(2x-6)}{25} \geqslant 1$.

Решење. Неједначина је дефинисана ако је $0 < \dfrac{x^2-5}{2x-6} \neq 1$, што је еквивалентно са $x \in (-\sqrt{5}, 1) \cup (1, \sqrt{5}) \cup (3, +\infty)$.

Неједначину запишимо у облику $\log_{\frac{x^2-5}{2x-6}} \dfrac{(x^2-5)(2x-6)}{25} - \log_{\frac{x^2-5}{2x-6}} \dfrac{x^2-5}{2x-6} \geqslant 0$, а затим, применом рационализације добијамо

$$\left(\frac{x^2-5}{2x-6} - 1\right)\left(\frac{(x^2-5)(2x-6)}{25} - \frac{x^2-5}{2x-6}\right) \geqslant 0.$$

Сређивањем израза на левој страни се добија

$$\frac{x^2-2x+1}{2x-6} \cdot \frac{(x^2-5)\big((2x-6)^2-25\big)}{25(2x-6)} \geqslant 0,$$

и најзад $(x-1)^2(x^2-5)(4x^2-24x+11) \geqslant 0$, што важи за $x \in (-\infty, -\sqrt{5}) \cup [\frac{1}{2}, \sqrt{5}] \cup [\frac{11}{2}, +\infty)$.

У пресеку са условом дефинисаности добија се решење дате неједначине $x \in [\frac{1}{2}, 1] \cup (1, \sqrt{5}) \cup [\frac{11}{2}, +\infty)$.

11. (2017) Решити неједначину $x^{\log_3 x} - 2 \leqslant (\sqrt[3]{3})^{\log^2_{\sqrt{3}} x} - 2x^{\log_3 \sqrt[3]{x}}$.

Решење. За $x > 0$ неједначину напишимо у облику

$$3^{\log_3^2 x} = 2 - 3^{\frac{4}{3}\log_3^2 x} + 2 \cdot 3^{\frac{1}{3}\log_3^2 x} \leqslant 0,$$

а затим $\left(3^{\log_3^2 x-2}-2\right)\left(1-3^{\frac{1}{3}\log_3^2 x}\right)\leqslant 0$. Сада посматрамо два случаја.

1. $3^{\log_3^2 x-2}\geqslant 0\ \wedge\ 1-3^{\frac{1}{3}\log_3^2 x}\leqslant 0 \iff x\geqslant 3^{\sqrt{\log_3 2}}\ \wedge\ x\leqslant 3^{-\sqrt{\log_3 2}}$.
2. $3^{\log_3^2 x-2}\leqslant 0\wedge 1-3^{\frac{1}{3}\log_3^2 x}\geqslant 0 \iff \log_3^2 x\geqslant \log_3 2\wedge \log_3^2 x\leqslant 0 \iff x=1$.

Обједињујући ова два случаја и услов дефинисаности добијамо да је решење дате нејдначине дато са $x\in\big(0,3^{-\sqrt{\log_3 2}}\big]\cup\{1\}\cup\big[3^{\sqrt{\log_3 2}},+\infty\big)$.

12. (2018) Одредити све реалне вредности променљиве x за које је један од три броја $\log_{x^2}(x^2-3x+2)$, $\log_{x^2}\dfrac{x^2}{x-2}$, $\log_{x^2}\dfrac{x^2}{x-1}$ једнак збиру друга два.

Решење. Приметимо да су за $x>2$ сва три броја дефинисана и да је збир сва три броја једнак $\log_{x^2}\left((x^2-3x+2)\cdot\dfrac{x^2}{x-2}\cdot\dfrac{x^2}{x-1}\right)=\log_{x^2}x^4=2$. Закључујемо да један од бројева мора бити једнак 1, као и збир друга два. Дакле, код једног од логаритама је аргумент једнак основи. Дакле, важи $x^2-3x+2=x^2$ или $\dfrac{x^2}{x-2}=x^2$ или $\dfrac{x^2}{x-1}=x^2$, одакле је $x=\dfrac{2}{3}$ или $x=3$ или $x=2$. Заједнички услов дефинисаности задовољава само вредност $x=3$. Дати изрази тада имају вредности, редом, $\log_9 2$, 1 и $1-\log_9 2$.

13. (2018) Одредити све реалне вредности променљиве x а које је један од три броја $\log_x\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$, $\log_{x-\frac{3}{2}}(x-3)$, $\log_{x-3}x$ једнак производу друга два.

Решење. Сва три броја су дефинисана ако је $x\in(3,4)\cup(4,+\infty)$. На том скупу је производ сва три броја $\log_x\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\cdot\log_{x-\frac{3}{2}}(x-3)\cdot\log_{x-3}x=1$. Закључујемо да је квадрат броја који је једнак производу друга два једнак 1. Другим речима, тај број је једнак 1 или -1. Лако је показати да ниједан од датих бројева не може бити једнак 1. Дакле, важи $\log_x\left(x-\dfrac{3}{2}\right)=-1$, $\log_{x-\frac{3}{2}}(x-3)=-1$, $\log_{x-3}x=-1$, па је

$$x=2\ \vee\ x=\frac{1}{2}\ \vee\ x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}\ \vee\ x=\frac{7}{2}\ \vee\ x=1.$$

Заједнички услов дефинисаности задовољавају вредности $x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ и $x=\dfrac{7}{2}$.

14. (2019) Решити неједначину

$$\log_{1+x^2}(1+8x^5)+\log_{1-3x^2+16x^4}(1+x^2)\leqslant 1+\log_{1-3x^2+16x^4}(1+8x^5).$$

Решење. Неједначина је дефинисана за $x\in\left(-\dfrac{1}{\sqrt[5]{8}},+\infty\right)\setminus\{0\}$. Увођењем ознака $1+x^2=u$, $1-3x^2+16x^4=v$, $1+8x^5=w$ неједначина се своди на $\log_u w + \log_v u - \log_v w - 1 \leqslant 0$ коју даље трансформишемо, редом, у њој еквивалентне:

$$\log_u w + \frac{1}{\log_u v} - \frac{\log_u w}{\log_u v} - 1 \leqslant 0,$$
$$\frac{\log_u v \log_u w + 1 - \log_u w - \log_u v}{\log_u v} \leqslant 0,$$
$$\frac{(\log_u w - 1)(\log_u v - 1)}{\log_u v} \leqslant 0,$$
$$\frac{(\log_u w - \log_u u)(\log_u v - \log_u u)}{\log_u v} \leqslant 0.$$

Применом методе рационализације последња неједначина се своди на $\dfrac{(w-u)(v-u)}{(u-1)(v-1)} \leqslant 0$, односно, после замене вредности u, v, w и сређивања израза, на $\dfrac{(8x^3-1)(4x^2-1)}{16x^2-3} \leqslant 0$ (јер је $x \neq 0$). Решење последње неједначине је $x \in \Big(-\infty, -\dfrac{1}{2}\Big] \cup \Big(-\dfrac{\sqrt{3}}{4}, \dfrac{\sqrt{3}}{4}\Big) \cup \Big\{\dfrac{1}{2}\Big\}$, што у пресеку с условом дефинисаности даје решење дате неједначине $x \in \left(-\dfrac{1}{\sqrt[5]{8}}, -\dfrac{1}{2}\right] \cup \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{4}, 0\right) \cup \left(0, \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right) \cup \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

15. (2020) Решити систем једначина (lg је ознака за логаритам с основом 10)

$$\Big(\frac{x^4}{y^2}\Big)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \quad \wedge \quad 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0.$$

Решење. Систем је дефинисан за $y > 0$ и $x < 0$. Логаритмовањем прве једначине за основу 10 добија се добија се једначина $\lg\Big(\dfrac{x^4}{y^2}\Big) \cdot \lg y = \lg(-x) \cdot \lg(-xy)$ која је даље еквивалентна (на датом домену) следећим једначинама: $(4\lg(-x) - 2\lg y)\lg y = \lg(-x)(\lg(-x) + \lg y)$, $\lg^2(-x) - 3\lg(-x)\lg y + 2\lg^2 y = 0$, $(\lg(-x) - \lg y)(\lg(-x) - 2\lg y) = 0$, $(-x-y)(-x-2y) = 0$. Закључујемо да је $x = -y$ или $x = -y^2$.

Другу једначину решимо као квадратну по x и добијамо $x = -2y$ или $x = y - 4$. Даље су могућа четири случаја.

а) $x = -y \wedge x = -2y$; решење $(0, 0)$ не задовољава услов дефинисаности.

б) $x = -y \wedge x = y - 4$; решење је пар $(-2, 2)$.

в) $x = -y^2 \wedge x = -2y$; решења су парови $(0, 0)$ и $(-4, 2)$, при чему први не задовољава услов дефинисаности.

г) $x = -y^2 \wedge x = y - 4$; решења су парови $\Big(\dfrac{-9-\sqrt{17}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}\Big)$ и $\Big(\dfrac{-9+\sqrt{17}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}\Big)$, при чему први не задовољава услов дефинисаности.

Дакле, решења система су парови $(-2,2)$, $(-4,2)$ и $\left(\dfrac{-9+\sqrt{17}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$.

16. (2021) Дати су бројеви $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$, $\log_{4x+1}\left(\dfrac{x}{2}+2\right)^2$, $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$. За које вредности x су два од датих бројева једнака, а трећи мањи од њих за 1?

Решење. Сва три броја су дефинисана ако је $x \in \left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}\right) \cup \left(\dfrac{2}{5}, +\infty\right)$. Уведимо ознаке $a = \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$, $b = \log_{4x+1}\left(\dfrac{x}{2}+2\right)^2$, $c = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$. Тада је $abc = 4$ и важи један од три услова: $a = b \wedge a = c+1$, $b = c \wedge c = a+1$, $a = c \wedge a = b+1$.

Први случај уз услов $abc = 4$ даје једначину $a^3 - a^2 - 4 = 0$, која за јединствено реално решење има $a = 2$. Тада је $b = 2$ и $c = 1$. Из $c = 1$ добијамо $5x - 1 = \dfrac{x}{2} + 2$, тј. $x = \dfrac{2}{3}$. У том случају $a = 2\log_{7/3}\dfrac{11}{3} \neq 2$, па $a = 2$, $b = 2$, $c = 1$ није решење.

У другом случају је $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$. Из $a = 1$ добијамо једначину $4x + 1 = \sqrt{5x-1}$ која нема решења.

У трећем случају је $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$. Из $b = 1$ добијамо једначину $4x + 1 = \left(\dfrac{x}{2}+2\right)^2$ чија су решења $x = 2$, $x = 6$. Директном провером уверимо се да $x = 6$ не задовољава услове задатка, а да $x = 2$ задовољава. Дакле, $x = 2$ је јединствено решење проблема.

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Живановић, *Метода рационализације у решавању логаритамских једначина и неједначина*, Настава математике **LXVI**, 1–2 (2021), 34–38.

[2] `https://olymp-online.mipt.ru`

Висока школа за васпитаче, Крушевац

E-mail: `mzivanovic@vaspks.edu.rs`