НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
LXVII, 1-2 (2022), 1–21

**Др Зоран Каделбург**

# УВОЂЕЊЕ РЕАЛНИХ БРОЈЕВА У ОСНОВНОЈ И СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

## 1. Увод

Тема „Реални бројеви“ појављује се у школским наставним програмима код нас три пута: у седмом разреду основне школе, а затим у првом и трећем разреду (већине) средњих школа. Наставу у тим разредима, по правилу, изводе професионални математичари, па се њихова стручна оспособљеност не доводи у питање. Верујемо да ће се већина тих наставника сложити да се ради о теми коју је најтеже реализовати у читавом дванаестогодишњем периоду изучавања математике у школи. Разлог је свакако у томе што је у ствари немогуће, у било ком од поменутих разреда, о увођењу реалних бројева говорити потпуно прецизно (чак се и на првој години факултета неки делови строгог заснивања прескачу). Зато је свака реализација ове теме неизбежно компромис између евентуалне жеље за строгошћу излагања и могућности ученика да прихвате то излагање или чак разумеју потребу за тако нечим.

У разним уџбеницима који се овом темом баве код нас и у другим образовним системима појављују се различити покушаји превазилажења поменутих проблема. Немамо намеру да арбитрирамо између тих варијанти (мада ћемо током излагања поменути неке грешке које се при томе доста често праве). Жеља нам је да уместо тога понудимо један могући начин обраде ових садржаја који би био, с једне стране, онолико строг колико процењујемо да ученици у одговарајућем разреду то могу да прихвате, а може се реализовати у предвиђеном времену, али истовремено не би „гурао под тепих“ стварне проблеме који постоје у заснивању реалних бројева. Сваки наставник ће, наравно, прилагодити ниво излагања својим ученицима, тј. одељењу у којем предаје. Посебно, у основној школи биће поменути само најосновнији елементи излагања које следи.

Поменути приступ биће описан у првом делу чланка (одељци 2 и 3). Но, да би се видело који су стварни кораци потребни да би се увођење реалних бројева строго реализовало (а слêдећи принцип да „наставник мора да зна (много) више

---

Изложено на Државном семинару о настави математике и рачунарства, одржаном (он-лајн) фебруара 2022. године.

од онога што ће испричати ученицима“) представићемо у одељцима 4 и 5 с нешто више детаља два могућа начина строгог увођења реалних бројева – приступе помоћу бесконачних децималних записа и тзв. Дедекиндових пресека.

## 2. Начини дефинисања скупа реалних бројева

Поступци помоћу којих се може коректно увести скуп реалних бројева могу се поделити на *конструкцијске* и *аксиоматске*.

**Конструкцијски приступи**

Сваки од конструкцијских начина увођења реалних бројева подразумева да се на експлицитан начин опише који су елементи скупа $\mathbb{R}$. Наведимо неке од могућности за то:

- бесконачни децимални записи;
- тачке на бројевној правој (односно мере одговарајућих дужи);
- Дедекиндови пресеци;
- Кошијеви низови;
- монотони низови.

Оно што свакако мора да следи након описивања самих елемената скупа $\mathbb{R}$ јесте дефинисање основних операција и релација у том скупу. Прецизније, треба увести операције сабирања $(+)$ и множења $(\cdot)$, као и релацију поретка $(\leqslant)$ и доказати да оне имају својства која се од њих очекују – да су оне „продужеци“ одговарајућих операција и релације из скупа рационалних бројева, тј. да је задовољен *принцип перманенције*. Најзад, потребно је доказати да нови систем $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ има кључне нове особине које отклањају познате недостатке система $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leqslant)$. Све ово (у било ком од изабраних начина дефинисања) захтева прилично обиман посао (на пример, у књигама [1], односно [2], он је изложен на 30–40 страна).

**Аксиоматски приступ**

Аксиоматски начин увођења реалних бројева нас на први поглед ослобађа ових гломазних извођења. Најпре се бира неки списак аксиома структуре $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ које прихватамо да су тачне без доказа (а које су, осим последње, заиста потпуно очекивана својства те структуре), на пример:

(1) својства сабирања:

(1.1) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\, x + y = y + x$ (комутативност сабирања),

(1.2) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\, (x + y) + z = x + (y + z)$ (асоцијативност сабирања),

(1.3) $(\exists 0 \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\, x + 0 = x$ (неутрални елемент за сабирање),

(1.4) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists (-x) \in \mathbb{R})\, x + (-x) = 0$ (супротни елемент за сабирање);

(2) својства множења:

(2.1) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\, x \cdot y = y \cdot x$ (комутативност множења),

(2.2) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\, (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (асоцијативност множења), (2.3) $(\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\forall x \in \mathbb{R})\, x \cdot 1 = x$ (неутрални елемент за множење),

(2.4) $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\exists x^{-1} \in \mathbb{R})\, x \cdot x^{-1} = 1$ (инверзни елемент за множење),

(2.5) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (дистрибутивност множења према сабирању);

(3) својства релације $\leqslant$:

(3.1) $(\forall x \in \mathbb{R})\, x \leqslant x$ (рефлексивност),

(3.2) $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x \leqslant y \wedge y \leqslant x \;\Rightarrow\; x = y)$ (антисиметричност),

(3.3) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x \leqslant y \wedge y \leqslant z \;\Rightarrow\; x \leqslant z)$ (транзитивност),

(3.4) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\, (x \leqslant y \vee y \leqslant x)$ (линеарност поретка),

(3.5) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x \leqslant y \;\Rightarrow\; x + z \leqslant y + z)$ (сагласност са сабирањем),

(3.6) $(\forall x, y \in \mathbb{R})(0 \leqslant x \wedge 0 \leqslant y \;\Rightarrow\; 0 \leqslant x \cdot y)$ (сагласност с множењем);

(4) аксиома непрекидности:

сваки непразан, одозго ограничен скуп у $\mathbb{R}$ има супремум у $\mathbb{R}$.

Затим се релативно лако изводе стандардна „правила рачунања“ (видети, на пример, књиге [3] и [4]). Преостаје да се концентришемо на извођење последица једине „нетривијалне“ аксиоме (4) – неке од могућих варијанти *аксиоме непрекидности* – које су битне за заснивање теорије граничних вредности и непрекидности функција.

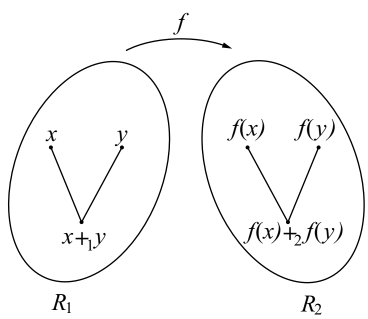
Међутим, та једноставност је само привидна. Наиме, оно што свакако недостаје оваквом приступу јесте доказ да таква структура постоји, тј. конструкција (бар једне) конкретне *реализације* поменуте структруе, јер само тако можемо бити сигурни да изабрани систем аксиома није контрадикторан. А то нас враћа на почетак – на потребу ефективне конструкције реалних бројева.

**Јединственост**

У оба приступа дефиницији скупа $\mathbb{R}$ потребно је урадити још нешто – доказати да је датим особинама скуп реалних бројева једнозначно одређен (до на изоморфизам). Под тим подразумевамо следеће.

Претпоставимо да су могуће две реализације нашег система аксиома – у једној се ради о скупу $\mathbb{R}_1$ са операцијама $+_1$ и $\cdot_1$ и релацијом $\leqslant_1$, а у другој о скупу $\mathbb{R}_2$ са операцијама $+_2$ и $\cdot_2$ и релацијом поретка $\leqslant_2$. Казаћемо да су те две реализације *изоморфне* ако постоји функција $f\colon \mathbb{R}_1 \to \mathbb{R}_2$ која је бијекција и таква да је за свака два елемента $x, y \in \mathbb{R}_1$ испуњено (в. слику 1):

$$f(x +_1 y) = f(x) +_2 f(y),$$
$$f(x \cdot_1 y) = f(x) \cdot_2 f(y),$$
$$x \leqslant_1 y \iff f(x) \leqslant_2 f(y).$$




Слика 1

Другим речима, код изоморфних реализација сви међусобни односи чувају се при пресликавању функцијом $f$, која се назива *изоморфизмом* поменутих реализација. Подсетимо се да у случају неких других структура – нпр. у случају групе, прстена или поља (које не мора да задовољава аксиому непрекидности) може да се догоди да постоје неизоморфне реализације. Али, у случају аксиома реалних бројева то није могуће – може се доказати (в. нпр. [1], [4] или [5]) да су све могуће реализације аксиома структуре $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ изоморфне. Другим речима, у којем год конкретном облику (од напред наведених) да замислимо реалне бројеве, радићемо у суштини у истом окружењу и закључци које будемо изводили биће еквивалентни.

## 3. Увођење реалних бројева у школи

### Мотивација

Први корак приликом увођења скупа реалних бројева у настави (у било ком од напред поменутих разреда) свакако треба да буде „убеђивање" ученика да је тако нешто потребно, тј. навођење недостатака структуре $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leqslant)$ рационалних бројева.

И у седмом разреду основне и у првом разреду средње школе треба почети подсећањем на то који су били разлози проширивања скупа природних бројева $\mathbb{N}$ до скупа $\mathbb{Q}^+$ позитивних разломака, као и овог последњег до скупа $\mathbb{Q}$ рационалних бројева (на пример, немогућност решавања једначине $a \cdot x = b$ у скупу природних бројева, односно $a + x = b$ у скупу позитивних разломака). При томе су, у оба случаја, експлицитно уведени нови бројеви (за један могући начин прецизног увођења поменутих скупова бројева видети чланак [6]).

На претходно се директно надовезује прича о немогућности решавања једначине $x^2 = 2$ (и њој сличних) у скупу рационалних бројева.

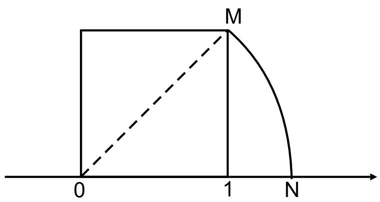
Нагласимо овде да одговарајуће тврђење **не треба да гласи**

„(квадратни) корен из 2 није рационалан број", **већ**

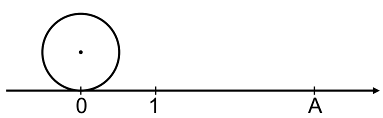
„не постоји рационалан број чији је квадрат једнак 2".

Разлог је, наравно, тај што док немамо на располагању реалне бројеве, сам појам корена уопште не може бити дефинисан (сем у ретким специјалним случајевима). При томе, (добро познати) питагорејски доказ ове чињенице не би смео да се „прескочи", чак ни у основној школи – ради се о изузетно важној чињеници и, без обзира на то што вероватно неки од ученика (можда и већина њих) неће у потпуности разумети све кораке тог доказа, већ са̂мо његово излагање учиниће, надамо се, да прихвате да је тако нешто потребно, а онда је вероватније да ће им и сама та чињеница пре остати у сећању.

За демонстрацију другог познатог недостатка скупа рационалних бројева – немогућности мерења произвољних дужи, тј. постојања *несамерљивих дужи* – у седмом разреду још не може да се користи Питагорина теорема, јер се она по програму обрађује касније. Али, могуће је као пример користити квадрат чија дијагонала има дужину 2 (а чија је и површина једнака 2), а страница би онда морала имати дужину чији је квадрат једнак 2. (Строго говорећи, такав приступ би захтевао образложења око везе линеарних мера и мера за површину, али то је нешто што се ипак може прескочити у њиховом случају.) Препоручујемо да се о немогућности мерења дијагонале квадрата помоћу његове странице (в. слику 2) говори одмах након обраде Питагорине теореме (а у првом разреду средње школе истовремено са причом о једначини $x^2 = 2$). При томе, доста је важно поменути и друге дужи (нпр. обим јединичног круга) које се не могу измерити помоћу дате јединичне дужи (в. слику 3 на којој је дуж $OA$ једнака обиму нацртаног круга пречника 1), између осталог и зато да би се избегао утисак који многи ђаци понесу – да су ирационални бројеви само „тамо неки корени“.



Слика 2



Слика 3

Дакле, сматрамо погрешним приступ (присутан у многим уџбеницима) у којем се не инсистира на томе да су реални (и, специјално, ирационални) бројеви нешто што тек треба увести, дефинисати, већ се они третирају као нешто што постоји и треба само да их „препознамо“. Или, мало другачије исказано, велика је грешка (која се, углавном, не исказује овако експлиицитно, али се практично провлачи у неким излагањима) „сервирати“, као неку врсту дефиниције, ученицима следеће две реченице:

„Ирационални бројеви су реални бројеви који нису рационални“,

„Скуп реалних бројева се добија као унија скупова рационалних и ирационалних бројева“.

Наравно, скуповне једнакости

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{I}, \quad \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}, \tag{5}$$

које се наводе у скоро свим уџбеницима, тачне су, али никако не могу да послуже као дефиниције скупа реалних бројева.

**Увођење нових бројева**

Ако смо овим успели да убедимо ученике да је неопходно увести нову врсту бројева, поставља се питање како то треба учинити. Аксиоматски начин свакако не долази у обзир у основној школи, а према нашем мишљењу ни у првом разреду гимназије (мада је присутан у неким уџбеницима). Од конструкцијских варијанти, понегде се појављује (експлицитно или имплицитно) геометријски приступ који се практично базира на захтеву да „свака дуж има своју дужину“. Не поричући да је, у принципу, могуће увести реалне бројеве на тај начин, чини нам се да он није погодан за коришћење у школама, и то из два разлога – први је да он ипак не нуди

„опипиљив“ облик бројева које уводимо; други разлог је што постоје проблеми код дефинисања операција са дужинама дужи као реалним бројевима. На пример, код дефинисања производа било би потребно претходно знати прецизно како се уводи површина правоугаоника.

Због свега напред наведеног, сматрамо да је много погодније реалне бројеве дефинисати као *бесконачне децималне записе*. Наиме, ученици у седмом разреду основне школе (а свакако и у првом средње) знају да се рационални бројеви могу представити као коначни или периодично-бесконачни децимални записи, па не би требало да им је тешко да замисле и бесконачне непериодичне записе, уз навођење неколико конкретних примера. Рецимо, може се навести следећи добро познати пример.

Пример 1. Посматрајмо децимални запис

$$0{,}10100100010\ldots010\ldots$$

у којем се после сваке јединице појављује низ нула, сваки пут за један дужи него претходни. Овај запис није периодичан.

*Доказ.* Претпоставимо, супротно, да је овај запис периодичан с периодом дужине $k$. Довољно далеко у низу његових цифара постоји низ од $2k$ узастопних нула:

$$0{,}101001\ldots1\underbrace{00\ldots0}_{2k}10\ldots$$

Тада неких $k$ од тих цифара чине једну целу периоду. То би значило да су све цифре после уочених $k$ нула такође једнаке нули; другим речима, све цифре почев од неке, у овом децималном запису једнаке су нули, што је јасно нетачно. Добијена контрадикција доказује да овај запис не може бити периодичан.

Сличан је и пример броја 0,12345678910111213 ... у којем су, као децимале, редом исписани сви природни бројеви (у њиховом декадном запису).

Сада је природно увести следећу основну дефиницију.

Дефиниција 1. Скуп свих бесконачних децималних записа облика

$$+a_0{,}a_1a_2\ldots a_n\ldots \quad \text{или} \quad -a_0{,}a_1a_2\ldots a_n\ldots, \tag{6}$$

где је $a_0$ природан број или нула, а $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ су декадне цифре (тј. елементи скупа $\{0, 1, \ldots, 9\}$), зваћемо *скуп реалних бројева* и означаваћемо га са $\mathbb{R}$. Бројеве првог од наведених облика (6) зваћемо *позитивним* (и знак $+$ при њиховом навођењу најчешће нећемо писати), а бројеве другог облика *негативним*, с тим да број *нула* (тј. $0 = 0{,}000\ldots$) не сматрамо ни позитивним ни негативним. Притом још усвајамо договор да се, на пример, записи $1{,}000\ldots$ и $0{,}999\ldots$ сматрају једнаким (одређују исти реалан број) и слично у осталим одговарајућим случајевима.

Овако уведени скуп $\mathbb{R}$ обухвата записе двеју врста:

1° бесконачне децималне записе који су периодични (специјалан случај таквих записа су они код којих су све цифре почев од неке једнаке нули – њих можемо схватити као да су добијени из коначних децималних записа којима је дописано бесконачно много нула);

2° непериодичне бесконачне децималне записе.

Сваком од записа облика 1° одговара одређени рационалан број. Обратно није тачно – неки рационални бројеви имају два записа (који се завршавају или свим нулама, или свим деветкама).

Записи облика 2° одговарају новоуведеним бројевима – за такве реалне бројеве рећи ћемо да су *ирационални* и скуп свих таквих бројева означаваћемо са $\mathbb{I}$. При томе важе раније поменуте скуповне релације (5).

**Дефинисање операција и релације поретка**

Свакако треба одмах рећи ученицима да са̂мо дефинисање објеката које ћемо звати реалним бројевима није довољно – неопходно је описати како се с тим објектима рачуна. Јер, сасвим је јасно да поступци сабирања и множења (о одузимању и дељењу и да не говоримо) које су примењивали код коначних децималних записа овде више нису могући. О овоме се потпуно прецизно не може говорити у основној школи, али мислимо да је уз неколико примера урађених помоћу калкулатора могуће демонстрирати рачун с приближним вредностима (видећемо у одељку 4. да је стварна дефиниција операција у овако уведеном скупу $\mathbb{R}$ базирана на имитацији рачуна с приближним вредностима). У првом разреду средње школе све се то може учинити још лакше, јер у одговарајућем програму управо фигурише део о рачуну с приближним вредностима реалних бројева.

**Пример 2**. Израчунати збир $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

Помоћу калкулатора налазимо да је:

$a=\sqrt{2}=1{,}41421356\ldots$, $b=\sqrt{3}=1{,}73205080\ldots$

Сабирање по правилима за коначне записе није могуће. Зато рачунамо:

$$\begin{gathered}
1<a<2, \qquad 1<b<2\\
2<a+b<4;\\
1{,}4<a<1{,}5, \qquad 1{,}7<b<1{,}8\\
3{,}1<a+b<3{,}3;\\
1{,}41<a<1{,}42, \qquad 1{,}73<b<1{,}74\\
3{,}14<a+b<3{,}16;\\
1{,}414<a<1{,}415, \qquad 1{,}732<b<1{,}733\\
3{,}146<a+b<3{,}148;\\
1{,}4142<a<1{,}4143, \qquad 1{,}7320<b<1{,}7321\\
3{,}1462<a+b<3{,}1464;\\
\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}$$

На овај начин можемо добити резултат са жељеним бројем децимала. На пример, $\sqrt{2}+\sqrt{3}\approx 3{,}14626437$.

**Пример 3**. Израчунати производ $\pi \cdot \sqrt{3}$.

$a = \pi = 3{,}14159265\ldots$, $b = \sqrt{3} = 1{,}73205080\ldots$

$$
\begin{gathered}
3 < a < 4, \qquad 1 < b < 2 \\
3 < a \cdot b < 8; \\
3{,}1 < a < 3{,}2, \qquad 1{,}7 < b < 1{,}8 \\
5{,}2 < a \cdot b < 5{,}7; \\
3{,}14 < a < 3{,}15, \qquad 1{,}73 < b < 1{,}74 \\
5{,}43 < a \cdot b < 5{,}48; \\
3{,}141 < a < 3{,}142, \qquad 1{,}732 < b < 1{,}733 \\
5{,}440 < a \cdot b < 5{,}445; \\
3{,}1415 < a < 3{,}1416, \qquad 1{,}7320 < b < 1{,}7321 \\
5{,}4410 < a \cdot b < 5{,}4415; \\
\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}
$$

и тако даље. На пример, $\pi \cdot \sqrt{3} \approx 5{,}44139809$.

Нешто је лакше увести *релацију поретка*, на пример, на следећи начин:

Дефиниција 2. Нека су дати позитивни реални бројеви

$$a = a_0{,}a_1a_2\ldots a_n\ldots, \quad b = b_0{,}b_1b_2\ldots b_n\ldots,$$

(подразумевамо, рецимо, да се они не завршавају искључиво деветкама). Упоредимо најпре њихове „целе делове“ – ако је, на пример, $a_0 < b_0$, онда кажемо да је $a < b$. Ако су они једнаки, упоређујемо прве децимале – ако је $a_1 < b_1$, опет кажемо да је $a < b$. Овај поступак настављамо док не дођемо до прве децимале (нпр. $k$-те) ових бројева које су различите. А ако се деси да је $a_k = b_k$ за свако $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, онда је свакако $a = b$.

У случају бројева произвољног знака, ова дефиниција се лако прилагођава.

Најзад, не треба пропустити да се каже да тек када су реални бројеви уведени и њихова својства изведена (истина, за сада без доказа), може се говорити о коренима из позитивних бројева (у почетку квадратним, а касније и произвољног реда), с тим да сада може да се докаже да они постоје. У средњој школи се, као што ћемо видети, нешто од тога може и доказати.

**Својство непрекидности**

Остаје питање шта чинити у трећем разреду средње школе. Наш је предлог да се у стручним школама, као и смеровима гимназије који нису природно-математички, не иде много даље од напред описаног, само се могу неки детаљи извести прецизније. Једино је у природно-математичком смеру (и, наравно, у Математичкој гимназији где је то предвиђено програмом) могуће реалне бројеве увести аксиоматски, с тим да не треба прећутати проблеме које такав приступ има (а о којима смо говорили раније). Свакако, треба инсистирати на некој варијанти аксиоме непрекидности (која је претходно геометријски интерпретирана) и њеном коришћењу у Математичкој анализи. Предлажемо њено истицање бар на два места – најпре, у већ поменутом доказу егзистенције корена из позитивног броја, а затим у доказу теореме о постојању лимеса монотоног и ограниченог низа.

Мада су добро познати, поновимо овде та два доказа (упоредити доказ другог тврђења с доказом његовог уопштења помоћу Дедекиндовог приступа у последњем одељку овог чланка).

Подсетимо се претходно дефиниције неких појмова.

Дефиниција 3. Непразан скуп $A \subset \mathbb{R}$ је *одозго ограничен* ако постоји $b \in \mathbb{R}$ тако да је $a \leqslant b$ за све $a \in A$; такав број $b \in \mathbb{R}$ је *мајоранта* скупа $A$; најмања мајоранта (ако постоји) је *супремум* скупа $A$ (ознака $\sup A$).

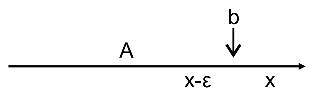
Појмови одоздо ограниченог скупа, миноранте и инфимума се уводе на сличан начин.

Дакле, $x = \sup A$ ако и само ако

$$\begin{cases} 1^\circ \ (\forall a \in A)\, a \leqslant x, \\ 2^\circ \ (\forall x')\ ((\forall a \in A)\, a \leqslant x' \implies x \leqslant x'). \end{cases}$$

Напомена. Претходни услови могу да се запишу и у облику (в. слику 4)

$$\begin{cases} 1^\circ \ (\forall a \in A)\, a \leqslant x, \\ 2^\circ \ (\forall \varepsilon > 0)(\exists b \in A)\, b > x - \varepsilon. \end{cases}$$



Слика 4

Под претпоставком да знамо да важи својство супремума, тј. да сваки непразан, одозго ограничени подскуп скупа $\mathbb{R}$ има супремум у $\mathbb{R}$, докажимо да важи

Теорема 1. *Постоји (и то јединствен) позитиван реалан број чији је квадрат једнак 2.*

*Доказ.* Посматрајмо скуп $A = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2 \,\}$. Он је свакако непразан (на пример, $1 \in A$) подскуп скупа $\mathbb{R}$ који је ограничен одозго (на пример, број 2 је једна његова мајоранта). Зато он има супремум – означимо га са $y = \sup A$. Докажимо да је управо $y^2 = 2$.

Као што знамо, довољно је показати да није $y^2 < 2$ нити $y^2 > 2$. Ако би било, рецимо, $y^2 < 2$, изабраћемо природан број $n$ за који је $n > \dfrac{2y+1}{2-y^2}$ (такав број постоји према Архимедовом својству, за који од раније знамо да важи у скупу рационалних бројева). Тада је

$$\left(y + \frac{1}{n}\right)^2 = y^2 + 2y\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} < y^2 + (2y+1)\frac{1}{n} < y^2 + (2 - y^2) = 2,$$

па број $y+\dfrac{1}{n}$ припада скупу $A$. Како је он, очигледно, већи од $y$, дошли смо у ситуацију да је један елемент скупа $A$ већи од његовог супремума, што је, наравно, немогуће.

На сличан начин се показује да не може бити ни $y^2>2$. Дакле, број $y\in\mathbb{R}^+$ задовољава услов $y^2=2$. Претпоставимо да постоји још један позитиван реалан број $z$ за који је $z^2=2$, и да је, на пример $y<z$. Тада би било $2=y^2<z^2=2$, што је нетачно. Значи, број $y$ са траженим особинама је јединствено одређен. ∎

Јасно је да се аналогно тврђење за било који други позитиван реалан број (уместо двојке) може доказати слично. Доказ одговарајућег тврђења за корен произвољног реда нешто је технички сложенији (видети нпр. [3] или [7]).

Теорема 2. *Сваки растући и одозго ограничени низ* $(a_n)$ *реалних бројева је конвергентан. Сваки опадајући и одоздо ограничени низ* $(a_n)$ *реалних бројева је конвергентан.*

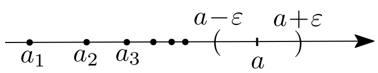
*Доказ.* Доказаћемо тврђење за случај растућег низа. Нека је

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots$$

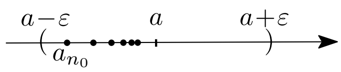
и нека постоји реалан број $M$ такав да је $a_n\leqslant M$ за све $n\in\mathbb{N}$. Посматрајмо скуп свих вредности датог низа

$$A=\{a_1,a_2,\dots,a_n,\dots\}.$$

На основу претпоставке, тај (непразан) скуп је ограничен одозго подскуп скупа реалних бројева. На основу својства супремума, постоји супремум тог скупа, број $a=\sup A$. Доказаћемо да је управо $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.



Слика 5



Слика 6

Посматрајмо произвољну околину $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ тачке $a$. Бар један члан низа $(a_n)$ припада тој околини, јер би се у противном сви чланови низа налазили лево од тачке $a-\varepsilon$, па би тај број био мајоранта скупа $A$, што је немогуће јер је он мањи од супремума $a$ тог скупа, слика 5. Нека члан $a_{n_0}$ низа $(a_n)$ припада околини $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$. Како је низ $(a_n)$ растући, то за све $n>n_0$ важи $a_n\geqslant a_{n_0}>a-\varepsilon$, слика 6. С друге стране је $a_n\leqslant a<a+\varepsilon$, јер је $a$ супремум скупа $A$. Према томе, за све чланове низа, почевши од оног са индексом $n_0$ важи

$$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon,$$

односно сви они се налазе у $\varepsilon$-околини тачке $a$, па је заиста $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. ∎

## 4. Реални бројеви као бесконачни децимални записи

У овом и наредном одељку описујемо укратко два начина прецизног дефинисања скупа реалних бројева. За увођење реалних бројева као бесконачних децималних записа, које приказујемо у овом одељку, пратимо, уз одређена скраћивања, поступак дат у књизи [1].

Претпостављаћемо да су нам позната основна својства уређеног поља $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leqslant)$ (наведена у одељку 2 у оквиру прве три групе аксиома) и њихове последице, укључујући чињеницу да сваки рационалан број има свој *децимални запис*, који може бити коначан или периодично-бесконачан. Ради краћег изражавања, сматраћемо и коначне децималне записе периодично-бесконачним (тиме што сваком од њих дописујемо бесконачно много нула).

Основна дефиниција 1 скупа реалних бројева у облику бесконачних децималних записа (6) дата је на страни 6. С обзиром на тамо наведену конвенцију, из разматрања ћемо искључити записе који се завршавају с бесконачно много деветки.

*Апсолутна вредност* датих бројева (6) је број

$$|a| = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots .$$

### Релација поретка у скупу $\mathbb{R}$

Релација $<$ у скупу $\mathbb{R}$ уводи се дефиницијом 2 датом на страни 8. Казаћемо да је $a$ мање или једнако од $b$ и писати $a \leqslant b$ ако важи $a < b$ или $a = b$.

Лема 1. *Релација* $\leqslant$ *на скупу* $\mathbb{R}$ *је релација тоталног поретка, тј. задовољена су својства* (3.1)–(3.4) *наведена на страни 3.*

*Доказ.* Докази наведених својстава су једноставни. Илустрације ради, докажимо својство транзитивности (3.3), при чему ћемо се ограничити на случај кад су $a, b, c$ међусобно различити позитивни бројеви. Дакле, треба доказати да из $a < b$ и $b < c$ следи да је $a < c$. Нека су

$$a = a_0{,}a_1a_2a_3\ldots; \quad b = b_0{,}b_1b_2b_3\ldots; \quad c = c_0{,}c_1c_2c_3\ldots$$

децимални записи датих бројева. Према дефиницији, из $a < b$ следи да постоји број $k \in \mathbb{N}_0$ такав да је

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \ldots, \quad a_{k-1} = b_{k-1}, \quad a_k < b_k. \tag{7}$$

Слично, из $b < c$ следи да постоји $l \in \mathbb{N}_0$ такав да је

$$b_0 = c_0, \quad b_1 = c_1, \quad \ldots, \quad b_{l-1} = c_{l-1}, \quad b_l < c_l. \tag{8}$$

Означимо $m = \min\{k, l\}$. Тада из (7) и (8) следи да важи

$$a_0 = c_0, \quad a_1 = c_1, \quad \ldots, \quad a_{m-1} = c_{m-1}, \quad a_m < c_m,$$

што и значи да је $a < c$. ∎

**Постојање тачних граница**

Појмови одозго ограниченог скупа, мајоранте и супремума уводе се дефиницијом 3 датој на страни 9. Докажимо сада основно својство скупа реалних бројева по којем се он разликује од скупа рационалних бројева.

Теорема 3. *Сваки непразан, одозго ограничен скуп у $\mathbb{R}$ има супремум у $\mathbb{R}$; сваки непразан, одоздо ограничен скуп у $\mathbb{R}$ има инфимум у $\mathbb{R}$.*

*Доказ.* Доказаћемо тврђење теореме за случај супремума.

1° Случај $(\exists a \in A)\, a \geqslant 0$. Посматрајмо скуп $\{\, [a] \mid a \in A, a \geqslant 0 \,\}$ свих „целих делова“ $[a]$ ненегативних елемената скупа $A$; он је ограничен подскуп скупа $\mathbb{N}_0$, па има максимум – означимо га са $x_0$. Посматрајмо бројеве $a \in A$ за које је $[a] = x_0$ и њихове прве децимале; постоји њихов максимум, означимо га са $x_1$, итд. Докажимо да је

$$x = x_0, x_1 x_2 \ldots = \sup A.$$

Заиста, $a \leqslant x$ за све $a \in A$ важи на основу начина избора децимала броја $x$. Нека је $x' < x$ и, на пример, $x' > 0$. Ако је $x' = x'_0, x'_1 x'_2 \ldots$, тада постоји $m$ тако да је

$$x' = x_0{,}x_1 \ldots x_{m-1} x'_m \ldots, \quad x'_m < x_m.$$

Тада за $b = x_0, x_1 \ldots x_m$ имамо да је $x' < b < x$.

2° Случај кад је $a \leqslant 0$ за све $a \in A$ разматра се слично. ∎

**Апроксимација реалних бројева рационалним**

За прецизно дефинисање операција у скупу $\mathbb{R}$ биће нам потребна нека помоћна тврђења о могућности апроксимације реалних бројева рационалним.

Лема 2. *За сваки реалан број $a$ и свако рационално $\varepsilon > 0$ постоје рационални бројеви $\alpha_1$ и $\alpha_2$ такви да је $\alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2$ и $\alpha_2 - \alpha_1 < \varepsilon$.*

*Доказ.* Нека је нпр. $a = a_0{,}a_1 a_2 a_3 \ldots$ позитиван. За дато $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ изаберимо $n \in \mathbb{N}$ тако да је $10^{-n} < \varepsilon$ (ово је могуће на основу већ поменутог Архимедовог својства скупа рационалних бројева). За рационалне бројеве $\alpha_1 = a_0{,}a_1 a_2 \ldots a_n$ и $\alpha_2 = \alpha_1 + 10^{-n}$ очигледно важи $\alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2$ и $\alpha_2 - \alpha_1 = 10^{-n} < \varepsilon$. ∎

Лема 3. *За свака два реална броја $a, b$, $a < b$, постоји рационалан број $\alpha$ такав да је $a < \alpha < b$.*

*Доказ.* Можемо претпоставити да су бројеви $a, b$ ненегативни. Нека је $a = a_0{,}a_1 a_2 \ldots$ и $b = b_0{,}b_1 b_2 \ldots$ (овај пут, изузетно, ако је број $b$ рационалан с коначним децималним записом, претпоставимо да смо га записали тако да се завршава с бесконачно много деветки). Због $a < b$, постоји $k \in \mathbb{N}$ тако да је $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, … , $a_{k-1} = b_{k-1}$ и $a_k < b_k$, при чему нису све децимале броја $b$ почев од неке једнаке нули. Означимо са $p$ најмањи од бројева $n$, већих од $k$ за које је $b_n \neq 0$. Тада се број $b$ записује у облику

$$b = b_0{,}b_1 \ldots b_k 0 \ldots 0 b_p \ldots, \text{ где је } b_p > 0.$$

Сада број $\alpha = b_0{,}b_1 \ldots b_k 0 \ldots 0 b_p$ задовољава услов $a < \alpha < b$. ∎

Лема 4. *Нека су* $a, b \in \mathbb{R}$. *Ако за свако* $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$ *постоје рационални бројеви* $\gamma_1, \gamma_2$ *такви да је* $\gamma_1 \leqslant a \leqslant \gamma_2$, $\gamma_1 \leqslant b \leqslant \gamma_2$ *и* $\gamma_2 - \gamma_1 < \varepsilon$, *тада је* $a = b$.

*Доказ.* Претпоставимо, супротно тврђењу, да је, на пример, $a < b$. На основу леме 3, постоје рационални бројеви $\alpha_1, \alpha_2$ такви да је

$$a < \alpha_1 < \alpha_2 < b. \tag{9}$$

Изаберимо произвољне рационалне бројеве $\gamma_1, \gamma_2$ такве да је $\gamma_1 \leqslant a \leqslant \gamma_2$ и $\gamma_1 \leqslant b \leqslant \gamma_2$. Из услова (9) добијамо да је $\gamma_1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \gamma_2$. Али тада је обавезно $\gamma_2 - \gamma_1 > \alpha_2 - \alpha_1$, што противречи претпоставци да разлика $\gamma_2 - \gamma_1$ може бити изабрана тако да буде произвољно мала. ■

**Сабирање у скупу $\mathbb{R}$**

Дефиниција 4. За бројеве $a, b \in \mathbb{R}$, кажемо да је број $x \in \mathbb{R}$ њихов *збир* и означавамо $x = a + b$ ако за произвољне рационалне бројеве $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ из $\alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2$ и $\beta_1 \leqslant b \leqslant \beta_2$ следи $\alpha_1 + \beta_1 \leqslant x \leqslant \alpha_2 + \beta_2$.

Читаоцу предлажемо да упореди ову дефиницију са начином како смо у примерима 2 и 3 (стр. 7 и 8) одређивали децимале бројева $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ и $\pi \cdot \sqrt{3}$.

Теорема 4. *За било која два реална броја* $a, b$, *број* $x$ *описан у дефиницији* 4 *постоји и јединствено је одређен. Сем тога, ако су бројеви* $a, b$ *рационални, онда се као збир добија број* $a + b$, *схваћен као збир рационалних бројева.*

*Доказ.* 1° *Егзистенција.* Фиксирајмо произвољне $\alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{Q}$ за које је $a \leqslant \alpha_2$ и $b \leqslant \beta_2$ и посматрајмо скуп

$$A = \{\, \alpha_1 + \beta_1 \mid \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{Q},\ \alpha_1 \leqslant a,\ \beta_1 \leqslant b \,\}.$$

Тај скуп је ограничен одозго (заиста, из $\alpha_1 \leqslant a$ и $a \leqslant \alpha_2$ следи да је $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$ и, слично, $\beta_1 \leqslant \beta_2$, а из последње две неједнакости следи да је $\alpha_1 + \beta_1 \leqslant \alpha_2 + \beta_2$). На основу теореме 3, следи да постоји $x = \sup A$ – добијени број $x$ задовољава услов наведен у дефиницији 4. Заиста, неједнакост $\alpha_1 + \beta_1 \leqslant x$ следи директно из чињенице да је $x$ мајоранта скупа $A$, а неједнакост $x \leqslant \alpha_2 + \beta_2$ из чињенице да је број $\alpha_2 + \beta_2$ такође једна од мајоранти тог скупа, па не може бити мања од најмање мајоранте $x$.

2° *Јединственост.* Претпоставимо да, осим нађеног броја $x$, постоји још један број $y \in \mathbb{R}$, такав да такође важи $\alpha_1 + \beta_1 \leqslant y \leqslant \alpha_2 + \beta_2$ за све рационалне бројеве $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ за које је

$$\alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2 \quad \text{и} \quad \beta_1 \leqslant b \leqslant \beta_2. \tag{10}$$

Фиксирајмо произвољно $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$. На основу леме 2, постоје такви рационални бројеви $\alpha_1$ и $\alpha_2$ да је $\alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2$ и $\alpha_2 - \alpha_1 \leqslant \varepsilon/2$, као и рационални бројеви $\beta_1$ и $\beta_2$ такви да је $\beta_1 \leqslant b \leqslant \beta_2$ и $\beta_2 - \beta_1 \leqslant \varepsilon/2$. Тада важе услови (10), па бројеви $x$ и $y$ задовољавају услове $\alpha_1 + \beta_1 \leqslant x \leqslant \alpha_2 + \beta_2$ и $\alpha_1 + \beta_1 \leqslant y \leqslant \alpha_2 + \beta_2$, које можемо преписати у облику $\gamma_1 \leqslant x \leqslant \gamma_2$, $\gamma_1 \leqslant y \leqslant \gamma_2$, при чему је

$$\gamma_2 - \gamma_1 = (\alpha_2 + \beta_2) - (\alpha_1 + \beta_1) = (\alpha_2 - \alpha_1) + (\beta_2 - \beta_1) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Дакле, бројеви $x$ и $y$ задовољавају услове леме 4, па морају бити једнаки.

3° Нека су $a$ и $b$ рационални бројеви и $a+b$ њихов збир (у смислу сабирања у скупу $\mathbb{Q}$), и нека су $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ произвољни рационални бројеви који задовољавају услове (10). Тада важи и $\alpha_1+\beta_1 \leqslant a+b \leqslant \alpha_2+\beta_2$, при чему је, на основу доказаног услова јединстености, $a+b$ једини број који задовољава ову двоструку неједнакост за све $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, тј. он је управо збир бројева $a$ и $b$ у смислу дефиниције 4. ∎

Теорема 5. *За сабирање реалних бројева важе својства* (1.1)–(1.4) *и* (3.5) *из списка аксиома реалних бројева (одељак* 2*, стр.* 2 *и* 3*).*

*Доказ.* Доказаћемо само својство (3.5), тј. да, за произвољне реалне бројеве $a, b, c$, из $a<b$ следи $a+c<b+c$.

Из $a<b$, на основу леме 3, следи да постоје $\alpha_2, \beta_1 \in \mathbb{Q}$ такви да је $a<\alpha_2<\beta_1<b$. За дати $c \in \mathbb{R}$ и за позитиван рационалан број $\varepsilon=\beta_1-\alpha_2$, на основу леме 2, постоје $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{Q}$ тако да важи $\gamma_1 \leqslant c \leqslant \gamma_2$ и $\gamma_2-\gamma_1<\varepsilon$. Нека су $\alpha_1$ и $\beta_2$ произвољни рационални бројеви такви да је $\alpha_1 \leqslant a$ и $\beta_2 \geqslant b$. Тада важи

$$(11) \qquad \alpha_1+\gamma_1 \leqslant a+c \leqslant \alpha_2+\gamma_2 \quad \text{и} \quad \beta_1+\gamma_1 \leqslant b+c \leqslant \beta_2+\gamma_2.$$

Сем тога је $\alpha_2+\gamma_2<\beta_1+\gamma_1$ (следи из $\gamma_2-\gamma_1<\varepsilon=\beta_1-\alpha_2$), па користећи транзитивност релације $<$ из (11) добијамо да је $a+c<b+c$. ∎

**Множење у скупу $\mathbb{R}$**

Дефиниција 5. За дате бројеве $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b>0$, број $x \in \mathbb{R}$ је њихов *производ* и означава се $x=a \cdot b$ ако за произвољне рационалне бројеве $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta_1$, $\beta_2$ из $0<\alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2$ и $0<\beta_1 \leqslant b \leqslant \beta_2$ следи $\alpha_1\beta_1 \leqslant x \leqslant \alpha_2\beta_2$. Ако су $a, b$ произвољног знака, дефиниција производа се уводи на познати начин.

Теорема 6. *За било која два реална броја $a, b$, број $x$ описан у дефиницији* 5 *постоји и јединствено је одређен. Сем тога, ако су бројеви $a, b$ рационални, онда се као производ добија број $a \cdot b$, схваћен као производ рационалних бројева.*

*Доказ.* Доказаћемо егзистенцију и јединственост производа позитивних реалних бројева $a$ и $b$. Фиксирајмо произвољне рационалне бројеве $\alpha_2$ и $\beta_2$ за које је $a \leqslant \alpha_2$ и $b \leqslant \beta_2$ и означимо са $M$ већи од њих. Посматрајмо све могуће рационалне бројеве $\alpha_1$ и $\beta_1$ за које је $0<\alpha_1 \leqslant a$ и $0<\beta_1 \leqslant b$. Лако је проверити да је скуп свих тако добијених производа $\alpha_1\beta_1$ ограничен одозго (при чему је $\alpha_2\beta_2$ једна његова мајоранта). Означимо са $x$ супремум тог скупа (који постоји на основу теореме 3); он задовољава услов $\alpha_1\beta_1 \leqslant x \leqslant \alpha_2\beta_2$, па према дефиницији представља производ бројева $a$ и $b$.

Претпоставимо да постоје два броја, $x$ и $y$ који задовољавају неједнакости

$$(12) \qquad \alpha_1\beta_1 \leqslant x \leqslant \alpha_2\beta_2 \quad \text{и} \quad \alpha_1\beta_1 \leqslant y \leqslant \alpha_2\beta_2$$

за све могуће рационалне бројеве $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ за које је

$$(13) \qquad 0<\alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2 \leqslant M \quad \text{и} \quad 0<\beta_1 \leqslant b \leqslant \beta_2 \leqslant M.$$

Фиксирајући произвољно $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ и користећи лему 2, нађимо за дате бројеве $a$ и $b$ такве рационалне бројеве $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ који задовољавају услове (13) и за које важи $\alpha_2 - \alpha_1 < \varepsilon/(2M)$ и $\beta_2 - \beta_1 < \varepsilon/(2M)$. Тада се због услова (12) оба броја $x$ и $y$ налазе између рационалних бројева $\alpha_1\beta_1$ и $\alpha_2\beta_2$, при чему за разлику тих граница важи

$$\alpha_2\beta_2 - \alpha_1\beta_1 = \alpha_2(\beta_2 - \beta_1) + \beta_1(\alpha_2 - \alpha_1) < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

На основу леме 4 следи да је $x = y$.

Последњи део тврђења теореме доказује се слично као у теореми 4. ■

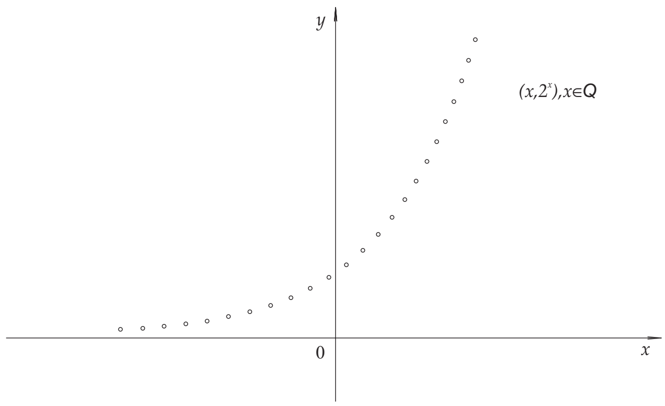
Без доказа наводимо и следеће тврђење.

Теорема 7. *За множење реалних бројева важе својства* (2.1)–(2.5) *и* (3.6) *из списка аксиома реалних бројева (одељак* 2*, стр.* 2 *и* 3*).*

Дакле, $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ је уређено поље и $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leqslant)$ је његово потпоље, с тим да поље $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ задовољава додатну особину (4), па је оно *потпуно.*

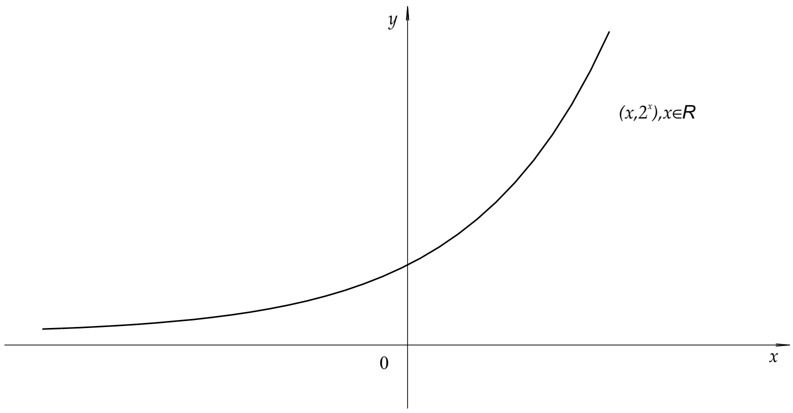
**Дефиниција експоненцијалне функције**

У већини уџбеника за други разред средњих школа, при дефинисању експоненцијалне функције (с реалним експонентом), углавном се прећуткује да се ради о сасвим нетривијалном кораку. Најчешће се сугерише да је довољно „само“ продужити дефиницију израза $a^x$ који је био одређен за дато $a > 0$ и $x \in \mathbb{Q}$ на ирационалне експоненте, уз визуелну представу „попуњавања“ одговарајуће криве (в. слике 7 и 8). Питања типа „чему је једнако $2^{\sqrt{2}}$?“ углавном се не постављају, а још мање се даје одговор.




Слика 7

Наравно, поменуту дефиницију није ни могуће дати без коришћења својства непрекидности скупа реалних бројева (било да је оно узето као аксиома или је доказано на неки начин). Исто важи и за кључно својство тако дефинисане




Слика 8

функције – да она пресликава скуп $\mathbb{R}$ *на* скуп $\mathbb{R}^+$ – што, уз инјективност која се лако доказује, омогућава коректну дефиницију логаритма.

Овде ћемо показати како се одговарајући поступак спроводи у случају дефинисања скупа $\mathbb{R}$ на начин који сада разматрамо.

ДЕФИНИЦИЈА 6. Нека су $a$ и $b$ дати реални бројеви, при чему је $a > 1$ (случај $0 < a < 1$ се разматра аналогно). Кажемо да је број $c$ *степен броја* $a$ *бројем* $b$, и пишемо $c = a^b$, ако за свака два рационална броја $\beta_1, \beta_2$, таква да је $\beta_1 \leqslant b \leqslant \beta_2$, важи $a^{\beta_1} \leqslant c \leqslant a^{\beta_2}$.

ТЕОРЕМА 8. *За свака два реална броја $a, b$, $a > 1$, број $c$ описан у дефиницији 6 постоји и једнозначно је одређен. При томе, ако је $b \in \mathbb{Q}$, број $c$ је једнак вредности израза $a^b$, схваћеног као степен броја $a$ с рационалним изложиоцем.*

*Доказ.* Скуп $A = \{\, a^{\beta_1} \mid \beta_1 \in \mathbb{Q}, \beta_1 \leqslant b \,\}$ је непразан и ограничен одозго било којим бројем облика $a^{\beta_2}$ за $\beta_2 \in \mathbb{Q}$, $b \leqslant \beta_2$. Зато постоји $c = \sup A$; за њега, по конструкцији, важи $a^{\beta_1} \leqslant c \leqslant a^{\beta_2}$ за све $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Q}$ за које је $\beta_1 \leqslant b \leqslant \beta_2$, чиме је егзистенција броја $c$ доказана.

За доказ јединствености броја $c$ с описаним својствима искористићемо познату Бернулијеву неједнакост записану у облику

$$d^n > 1 + n(d-1), \quad d > 1, \;\; n \in \mathbb{N}, \;\; n > 1, \tag{14}$$

из које, стављајући $d = a^{1/n}$, добијамо да важи

$$a^{1/n} - 1 < \frac{a-1}{n}. \tag{15}$$

Нека је $n \in \mathbb{N}$ произвољно. На основу леме 2, рационални бројеви $\beta_1$ и $\beta_2$ се могу изабрати тако да буде $\beta_1 \leqslant b \leqslant \beta_2$ и $\beta_2 - \beta_1 < 1/n$. Тада из (15) добијамо да важи

$$a^{\beta_2} - a^{\beta_1} = a^{\beta_1}(a^{\beta_2-\beta_1} - 1) < a^{\beta_1}(a^{1/n} - 1) < a^{\beta_1} \cdot \frac{a-1}{n}. \tag{16}$$

Изаберимо проивољно $\beta_2 \geqslant b$ (за које је свакако $\beta_1 \leqslant \beta_2$) и природан број $n$ за који је $n > \dfrac{a^{\beta_2}(a-1)}{\varepsilon}$, где је $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ произвољно. Тада из (16) добијамо да је $a^{\beta_2} - a^{\beta_1} < \varepsilon$. Но, онда из леме 4 следи да може постојати само један број $c$ који задовољава тражене услове.

Последње тврђење се доказује једноставно. ■

Теорема 9. За дато $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, функција $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, дата са $f(x) = a^x$, јесте бијекција.

*Доказ.* Из основних својстава функције $f$ за $a > 1$ (која се лако преносе са случаја функције с рационалним изложицем), функција $f(x) = a^x$ је строго растућа, дакле 1–1. Докажимо да је она *на*.

Нека је $c \in \mathbb{R}^+$ произвољно. Уочимо скуп $A = \{\beta_1 \in \mathbb{Q} \mid a^{\beta_1} < c\}$ – он је непразан и ограничен одозго. Заиста, на основу неједнакости (14) за $d = a$, бирајући природан број $n$ за који је $n > \dfrac{c}{a-1}$ добијамо да је $a^n > 1 + c > c$, па је $n$ мајоранта скупа $A$; слично, бирајући $n \in \mathbb{N}$ тако да је $n > \dfrac{1}{c(a-1)}$ добијамо да је $a^{-n} < c$, па је $-n \in A$. Означимо $b = \sup A$. Тада број $a^b$ задовољава услов $a^{\beta_1} < a^b < a^{\beta_2}$ за све $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Q}$ за које је $a^{\beta_1} < c < a^{\beta_2}$. Како је према претходној теореми број $c$ с таквом особином једнозначно одређен, то мора бити $a^b = c$. ■

Као што знамо, број $b$ одређен у доказу претходне теореме зове се *логаритам броја $c$ за основу $a$* и означава $b = \log_a c$.

## 5. Реални бројеви као Дедекиндови пресеци

Немачки математичар Дедекинд (R. Dedekind, 1831–1916) био је први који је, 1872. године, дао ригорозну дефиницију реалних бројева. Мада она на први поглед делује апстрактно, основна идеја те дефиниције је сасвим једноставна и базира се на захтеву да између скупа реалних бројева и скупа тачака неке праве треба да постоји бијекција. Или, другим речима, да се формално алгебарски изрази захтев да је права непрекидна линија.

Почнимо излагање следећим цитатом из основног Дедекиндовог чланка [8] (в. српски превод у [9]).

> ... свака тачка праве дели ту праву на два дела, таква да свака тачка једног дела лежи лево од било које тачке другог дела. Сматрам да се суштина непрекидности састоји у обрату те чињенице, тј. у следећем принципу:
>
> Ако су све тачке једне праве подељене у две класе тако да свака тачка једне класе лежи лево од било које тачке друге класе, тада постоји једна и само једна тачка која врши ту поделу.

Мада су се касније појавили многи други приступи дефинисању скупа $\mathbb{R}$, Дедекиндов начин је дуго остао један од најзаступљенијих међу конструкцијским приступима, како у практичној настави, тако и у уџбеницима. У овом одељку приказаћемо главне кораке поменутог приступа, углавном пратећи класични чланак [8] и неке допуне из уџбеника [2].

Дефиниција 7. Нека су $A_1$ и $A_2$ непразни подскупови скупа рационалних бројева $\mathbb{Q}$, такви да важи: $1^\circ$ $A_1 \cup A_2 = \mathbb{Q}$ и $2^\circ$ $(\forall a_1 \in A_1)(\forall a_2 \in A_2)\, a_1 < a_2$. Тада кажемо да је пар $(A_1, A_2)$ *пресек*[1] у скупу $\mathbb{Q}$.

Приметимо да из услова $2^\circ$ следи да је $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Скуп $A_1$ ћемо називати *доњом*, а скуп $A_2$ *горњом класом* пресека $(A_1, A_2)$. Приметимо да ако је $a_1 \in A_1$ и $a_1' < a_1$, тада је и $a_1' \in A_1$; дуално важи за горњу класу.

Формално-логички гледано, за дати пресек $(A_1, A_2)$, постоје следеће четири могућности:

$1^\circ$ доња класа $A_1$ има свој највећи елемент $r$, а горња класа $A_2$ нема најмањи елемент;

$2^\circ$ доња класа $A_1$ нема највећи елемент, а горња класа $A_2$ има свој најмањи елемент $r$;

$3^\circ$ доња класа $A_1$ има свој највећи елемент, а горња класа $A_2$ има свој најмањи елемент;

$4^\circ$ нити доња класа $A_1$ има највећи елемент, нити горња класа $A_2$ има најмањи елемент.

Одмах је, међутим, јасно да је случај $3^\circ$ немогућ – заиста, ако би било $r_1 = \max A_1$ и $r_2 = \min A_2$, (рационалан) број $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ не би могао да припада ниједној од ових класа, супротно услову $A_1 \cup A_2 = \mathbb{Q}$.

Али, случај $4^\circ$ је могућ. Довољно је изабрати $A_2 = \{x \in \mathbb{Q}^+ \mid x^2 > 2\}$ и $A_1 = \mathbb{Q} \setminus A_2$, и стандардним аргументом (в. доказ теореме 1) показује се да је $(A_1, A_2)$ пресек који задовољава услов $4^\circ$.

У случајевима $1^\circ$, односно $2^\circ$, казаћемо да наведени број $r$ *реализује* пресек $(A_1, A_2)$, или да пресек $(A_1, A_2)$ *одређује* број $r$. У оба случаја важи следеће: сваки рационалан број $a_1$ за који је $a_1 < r$ припада доњој класи, а сваки рационалан број $a_2$ за који је $a_2 > r$ припада горњој класи. Сам број $r$ може припадати било којој од те две класе; да бисмо поједноставили неке формулације, претпостављаћемо (ако се не захтева изричито другачије) да број $r$ припада горњој класи (и, дакле, представља њен најмањи елемент).

Дефиниција 8. Скуп свих могућих пресека $(A_1, A_2)$, формираних у скупу рационалних бројева, зваћемо *скуп реалних бројева* $\mathbb{R}$. У горепоменутим случају $4^\circ$, тај пресек зваћемо *ирационалним бројем*.

### Упоређивање реалних бројева

Дефиниција 9. Нека су $\alpha = (A_1, A_2)$ и $\beta = (B_1, B_2)$ два реална броја. Кажемо да је број $\alpha$ *већи* од броја $\beta$ и пишемо $\alpha > \beta$ ако је $A_1 \supset B_1$ и $A_1 \neq B_1$. Ако важи $\alpha > \beta$ или $\alpha = \beta$, онда пишемо $\alpha \geqslant \beta$.

[1] Термин „пресек“, као превод немачког "Schnitt", односно енглеског "cut", код нас се усталио. Можда би духу оригинала више одговарао термин „рез“.

Приметимо да је дати услов $A_1 \supset B_1$ еквивалентан услову $B_2 \supset A_2$. Лако је видети да је, у случају да су бројеви $\alpha$ и $\beta$ рационални, неједнакост $\alpha > \beta$, схваћена у смислу претходне дефиниције, еквивалентна услову $\alpha > \beta$ у смислу релације поретка у $\mathbb{Q}$.

Лема 5. Релација $\geqslant$ на скупу $\mathbb{R}$ је релација тоталног поретка, тј. задовољена су својства (3.1)–(3.4) из списка акисома реалних бројева (стр. 3).

*Доказ.* Доказаћемо својства (3.3) и (3.4).

Докажимо да из $\alpha > \beta$ и $\beta > \gamma$ следи $\alpha > \gamma$ (остали случајеви се лако проверавају). Нека је $\alpha = (A_1, A_2)$, $\beta = (B_1, B_2)$ и $\gamma = (C_1, C_2)$. Из претпоставки $\alpha > \beta$ и $\beta > \gamma$ следи да је $A_1 \supset B_1$ и $B_1 \supset C_1$, као и $A_1 \neq B_1$ и $B_1 \neq C_1$, одакле је $A_1 \supset C_1$ и $A_1 \neq C_1$, дакле $\alpha > \gamma$.

Нека су сада дати реални бројеви $\alpha = (A_1, A_2)$ и $\beta = (B_1, B_2)$. Претпоставимо да не важи $\alpha = \beta$ (па је $A_1 \neq B_1$). Ако је $A_1 \supset B_1$, онда је $\alpha > \beta$; ако то није случај, онда постоји $b_0 \in B_1$ за који $b_0 \notin A_1$, тј. $b_0 \in A_2$. Но, онда за свако $a \in A_1$ важи $a < b_0$, дакле $a \in B_1$. Значи да је $B_1 \supset A_1$, па је $\beta > \alpha$. ■

Лема 6. *За произвољне реалне бројеве $\alpha$ и $\beta$ за које је $\alpha > \beta$, постоји бар један рационалан број $r$ (а самим тим и бесконачно много њих) за који је $\alpha > r > \beta$.*

*Доказ.* Нека је $\alpha = (A_1, A_2)$ и $\beta = (B_1, B_2)$. Због $\alpha > \beta$ важи $A_1 \supset B_1$ и $A_1 \neq B_1$. Следи да постоји рационалан број $r \in A_1$, такав да $r \notin B_1$, тј. $r \in B_2$. За тај број важи $\alpha > r \geqslant \beta$ (једнакост би могла да важи ако је број $\beta$ рационалан). Али, како, према договору, класа $A_1$ не садржи највећи елемент, то се једнакост може искључити (у случају потребе се $r$ може повећати). ■

**Непрекидност скупа $\mathbb{R}$**

Подсетимо се да смо у случају формирања пресека у скупу рационалних бројева могли као резултат добити пресеке трију врста – постојала је могућност да нити доња класа има максимум, нити горња класа има минимум. Кључна нова особина скупа $\mathbb{R}$ јесте да се тако нешто не може догодити ако формирамо пресек (по правилима као у дефиницији 7) у скупу $\mathbb{R}$. Другим речима, нови скуп $\mathbb{R}$ нема „рупа“ какве је имао скуп $\mathbb{Q}$ (видети и цитат из Дедекиндовог чланка наведен у почетку овог одељка). Наредна Дедекиндова теорема је еквивалентна теореми 3 о егзистеницији супремума одозго ограниченог скупа.

Теорема 10. (Дедекинд) *За произвољан пресек $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ у скупу $\mathbb{R}$ или доња класа има највећи елемент или горња класа има најмањи елемент.*

*Доказ.* Означимо $A_1 = \mathcal{A}_1 \cap \mathbb{Q}$ и $A_2 = \mathbb{Q} \setminus A_1$. Јасно је да је $(A_1, A_2)$ пресек у скупу $\mathbb{Q}$ – означимо реалан број који он одређује са $\gamma$. Тај број мора припадати једној од класа $\mathcal{A}_1$ или $\mathcal{A}_2$; нека нпр. $\gamma \in \mathcal{A}_1$. Докажимо да је тада $\gamma = \max \mathcal{A}_1$. Ако то не би био случај, постојао би број $\alpha_0 \in \mathcal{A}_1$ такав да је $\alpha_0 > \gamma$. Према леми 6 тада постоји $r \in \mathbb{Q}$ такав да је $\alpha_0 > r > \gamma$. Како је $r < \alpha_0$, то $r \in \mathcal{A}_1$, па и $r \in A_1$. Добили смо контрадикцију: рационалан број $r$ који припада доњој класи пресека који одређује број $\gamma$ већи је од самог тог броја! Тиме је тврђење доказано. ■

**Операције у скупу $\mathbb{R}$**

Илустрације ради, наводимо само дефиницију сабирања у скупу $\mathbb{R}$ и доказ чињенице да она представља „продужење“ одговарајуће операције у скупу $\mathbb{Q}$. Доказ особина те операције, као и дефиницију и доказе својстава операције множења изостављамо (видети, нпр, књигу [2]).

Дефиниција 10. Нека су $\alpha = (A_1, A_2)$ и $\beta = (B_1, B_2)$ реални бројеви дати пресецима. Њихов *збир* је број $\gamma = (C_1, C_2)$, где рационалан број $c_1$ припада доњој класи $C_1$ ако и само ако постоје $a_1 \in A_1$ и $b_1 \in B_1$ тако да је $a_1 + b_1 \geqslant c_1$.

Лема 7. Ако су $\alpha$ и $\beta$ рационални бројеви, онда се њихов збир $\gamma$ формиран на напред описани начин поклапа са збиром $\alpha + \beta$ израчунатим по правилима сабирања у скупу $\mathbb{Q}$.

*Доказ.* За свако $c_1 \in C_1$ важи $c_1 \leqslant \alpha + \beta$ јер је $a_1 \leqslant \alpha$, $b_1 \leqslant \beta$, па је зато $a_1 + b_1 \leqslant \alpha + \beta$. Ако би у класи $C_2$ постојао број $c_2 < \alpha + \beta$, тј. ако је $\alpha + \beta = c_2 + p$, где је $p \in \mathbb{Q}^+$, тада бисмо имали

$$c_2 = (a - \tfrac{1}{2}p) + (\beta - \tfrac{1}{2}p),$$

што би било у супротности с дефиницијом броја $c_2$, јер је $\alpha - \frac{1}{2}p$ број из $A_1$, а $\beta - \frac{1}{2}p$ број из $B_1$; дакле, сваки број $c_2$ садржан у $C_2$ већи је или једнак $\alpha + \beta$. Тиме је показано да пресек $(C_1, C_2)$ одређује збир $\alpha + \beta$. ■

**Примена својства непрекидности у Математичкој анализи**

Као што знамо, својство непрекидности скупа $\mathbb{R}$ реалних бројева обезбеђује да у том скупу важе неке од најважнијих теорема Математичке анализе. Као илустрацију, покажимо овде, слêдећи Дедекиндов чланак [8] (али прилагођавајући термине и ознаке савременим), како се оно користи у доказу теореме о егзистенцији лимеса монотоне и ограничене функције. Добро познат специјалан случај овог тврђења је теорема 2 о постојању лимеса монотоног и ограниченог низа реалних бројева.

Теорема 11. *Ако је $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, строго растућа и одозго ограничена функција и ако је $s = \sup D$ тачка нагомилавања скупа $D$, онда постоји коначан $\lim_{x\to s} f(x)$.*

*Доказ.* Због ограничености функције $f$, постоји један, па самим тим и бесконачно много бројева $\alpha_2$ таквих да је $f(x) < \alpha_2$ за све $x \in D$ – означимо са $\mathcal{A}_2$ скуп свих таквих бројева $\alpha_2$ и $\mathcal{A}_1 = \mathbb{R} \setminus \mathcal{A}_2$. Сваки од бројева $\alpha_1 \in \mathcal{A}_1$ има својство да, за свако $\varepsilon > 0$, постоји $\delta > 0$ тако да је $f(x) \geqslant \alpha_1$ чим је $s - \delta < x < s$. Значи да је сваки број $\alpha_1$ мањи од било ког броја $\alpha_2 \in \mathcal{A}_2$; према теореми 10 следи да постоји број $\alpha$ који је или највећи елемент класе $\mathcal{A}_1$ или најмањи елемент класе $\mathcal{A}_2$. Прво се не може догодити јер је функција $f(x)$ строго растућа; дакле је

$\alpha = \min \mathcal{A}_2$. Који год број $\alpha_1 \in \mathcal{A}_1$ да изаберемо, имаћемо да је $\alpha_1 < f(x) < \alpha$ кад је $x$ довољно близу $s$, што значи да је $\lim_{x\to s} f(x) = \alpha$. ■

## ЛИТЕРАТУРА


[1] В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов: *Математический анализ*, Наука, Москва, 1979.

[2] Г. М. Фихтенгольц: *Курс дифференциального и интегрального исчисления, том I*, изд. 7-ое, Наука, Москва, 1969.

[3] Д. Аднађевић, З. Каделбург: *Математичка анализа I*, 11. издање, Математички факултет и Круг, Београд, 2014.

[4] S. Mardešić: *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru*, Školska knjiga, Zagreb, 1974.

[5] M. Marjanović: *Matematička analiza I*, Naučna knjiga, Beograd, 1979.

[6] М. М. Марјановић, З. Каделбург: *Структурисање бројевних система*, Настава математике **66**, 1–2, 2021, 1–12.

[7] З. Каделбург, В. Мићић, С. Огњановић, С. Чукић: *Анализа са алгебром за III разред Математичке гимназије*, уџбеник са збирком задатака, 7. изд, Круг, Београд, 2018.

[8] R. Dedekind: *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Dritte Auflage, Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1905. [http://www.gutenberg.org/files/21016/21016-pdf.pdf]

[9] *Заснивање наставе математичке анализе*, Избор текстова и превод: З. Каделбург, Библиотека наставника математике, књига 3, Друштво математичара Србије, Београд, 2019.



Математички факултет, Београд, Студентски трг 16

*E-mail*: kadelbur@matf.bg.ac.rs