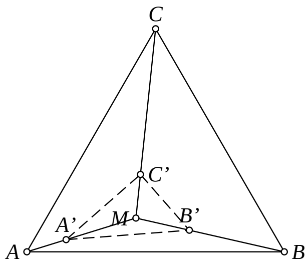
Марко Кошчица

ВИШЕ РЕШЕЊА ЈЕДНОГ ЗАДАТКА О ЈЕДНАКОСТРАНИЧНОМ ТРОУГЛУ

У овом тексту приказаћемо неколико алтернативних решења следећег задатка:

Нека је M тачка у унутрашњости једнакостраничног $\triangle ABC$ таква да важи $MA = 6$, $MB = 8$ и $MC = 10$. Одредити величину $\measuredangle AMB$.



Слика 1

Решење 1 (Примена инверзије у односу на круг). Уведимо ознаке $AB = a$, $\measuredangle MAC = \varphi$ и $\measuredangle MBC = \theta$. Нека је k круг у равни $\triangle ABC$ са центром у тачки M и полупречника $r > 0$ и нека се при инверзији у односу на k тачке A, B и C пресликавају у тачке A', B' и C', редом, сл. 1. Тада је $\measuredangle MC'A' = \measuredangle MAC = \varphi$ и $\measuredangle MC'B' = \measuredangle MBC = \theta$, па је $\measuredangle A'C'B' = \varphi + \theta$. Како је $\triangle A'C'M \sim \triangle CAM$, то је $A'C' : CA = MC' : MA$.

Из ове пропорције и једнакости $MC \cdot MC' = r^2$ следи једнакост $A'C' = \dfrac{r^2}{60}a$. Аналогно се може добити да важи $B'C' = \dfrac{r^2}{80}a$ и $A'B' = \dfrac{r^2}{48}a$. У $\triangle A'B'C'$ мера унутрашњег угла који се налази наспрам странице $A'B'$ једнака је $\varphi + \theta$, а како за странице $B'C'$, $C'A'$ и $A'B'$ важи

$$B'C' : C'A' : A'B' = \frac{1}{80} : \frac{1}{60} : \frac{1}{48} = \frac{1}{20} : \frac{1}{15} : \frac{1}{12} = \frac{3}{60} : \frac{4}{60} : \frac{5}{60} = 3 : 4 : 5,$$

то на основу обрнуте Питагорине теореме следи да важи $\varphi + \theta = 90^\circ$ и сада се лако добија да је

$$\measuredangle MAB + \measuredangle MBA = 2 \cdot 60^\circ - (\varphi + \theta) = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$$

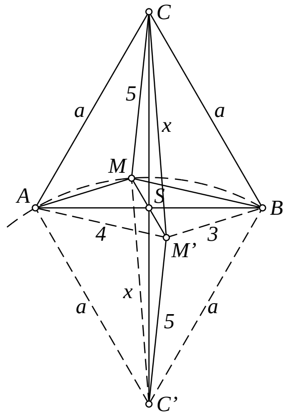
Коначно следи да је $\measuredangle AMB = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$. $\triangle$

Решење 2 (Примена једног својства паралелограма). Можемо претпоставити да је $MA = 3$, $MB = 4$ и $MC = 5$.

Нека је S средиште дужи AB и нека се при централној симетрији у односу на тачку S, тачке C и M пресликавају у тачке C' и M', редом, сл. 2. Уведимо ознаке $AB = a$, $M'C = x$ и $MM' = y$. Како су четвороуглови $CMC'M'$ и $MAM'B$ паралелограми (и то недегенерисани), то је $C'M = M'C = x$, $M'B = MA = 3$ и $M'A = MB = 4$. Такође је $CC' = 2CS = 2\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ и $C'A = C'B = AB = a$. Како је код сваког паралелограма збир квадрата дужина дијагонала једнак збиру квадрата дужина свих страница тог паралелограма, то из паралелограма $MAM'B$ имамо

$$y^2 + a^2 = 2\cdot(3^2+4^2) = 2\cdot 25 = 50,$$

одакле је $y^2 = 50 - a^2$.



Слика 2

Из паралелограма $CMC'M'$ имамо

$$y^2 + 3a^2 = 2\cdot(5^2 + x^2) = 50 + 2x^2.$$

Ако у последњој једнакости y^2 заменимо са $50 - a^2$, добијамо једнакост $50 - a^2 + 3a^2 = 50 + 2x^2$, одакле следи да је $x^2 = a^2$, па је $x = a$. Дакле, $C'M = C'A = C'B = a$, па тачка M припада кружници чији је центар тачка C' и полупречник $C'A$. Како су тачке M и C' са различитих страна праве AB, то је $\measuredangle AMB = 180^\circ - \frac{1}{2}\measuredangle AC'B = 180^\circ - \frac{1}{2}\cdot 60^\circ = 150^\circ$. $\triangle$

Решење 3 (Примена комплексних бројева). Нека $\triangle ABC$ припада комплексној равви и нека тачкама A, B, C и M одговарају комплексни бројеви $a = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $b = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $c = 1$ и m, редом. Нека је даље $AM = 3\zeta$, $BM = 4\zeta$ и $CM = 5\zeta$, где је ζ позитиван реалан број. Тада је $\overline{b} = a$ и $|a| = |b| = |c| = 1$. Из једнакости $|m-a| = 3\zeta$, тј. једнакости $(m-a)(\overline{m}-\overline{a}) = 9\zeta^2$ и једнакости $a\cdot\overline{a} = 1$ добијамо једнакост

$$|m|^2 - a\overline{m} - \overline{a}m = 9\zeta^2 - 1. \tag{1}$$

Аналогно се може добити

$$|m|^2 - b\overline{m} - \overline{b}m = 16\zeta^2 - 1, \tag{2}$$

$$|m|^2 - \overline{m} - m = 25\zeta^2 - 1. \tag{3}$$

Последњу једнакост можемо написати као $|m|^2 = \overline{m} + m + 25\zeta^2 - 1$, па ако у једнакостима (1) и (2) израз $|m|^2$ заменимо десном страном последње једнакости, добијамо систем од две линеарне једначине са непознатим $\overline{m}$ и m:

$$(1-a)\overline{m} + (1-\overline{a})m = -16\zeta^2,$$
$$(1-b)\overline{m} + (1-\overline{b})m = -9\zeta^2.$$

Решавањем овог система (нпр. помоћу Крамеровог правила) добија се да је $m = \frac{\zeta^2}{6}(-25+7\sqrt{3}i)$, затим $|m|^2 = \frac{\zeta^4}{36}((-25)^2+(7\sqrt{3})^2) = \frac{\zeta^4}{36}\cdot 772 = \frac{193\zeta^4}{9}$ и $\overline{m}+m = 2\operatorname{Re}(m) = -\frac{25\zeta^2}{3}$. Ако последње изразе за $|m|^2$ и $\overline{m}+m$ уврстимо у једнакост $|m|^2 - (\overline{m}+m) - 25\zeta^2 + 1 = 0$ и добијену једнакост помножимо са 9, добијамо једнакост

$$193\zeta^4 - 2\cdot 3\cdot 25\cdot \zeta^2 + 9 = 0.$$

Дискриминанта D ове квадратне једначине по ζ^2 је

$$D = 2^2\cdot 3^2\cdot 25^2 - 4\cdot 193\cdot 9 = 4\cdot 9\cdot(625-193) = 6^2\cdot 432 = 6^2\cdot 4\cdot 108 = 6^2\cdot 4\cdot 3\cdot 36 = 72^2\cdot 3.$$

Следи да је $\zeta^2 = \frac{75+36\sqrt{3}}{193}$ или $\zeta^2 = \frac{75-36\sqrt{3}}{193}$. Претпоставимо да је $\zeta^2 = \frac{75+36\sqrt{3}}{193}$. Како је $|c| = 1$, то је $AB = \sqrt{3}$. Упоредимо углове MAB и MAC. Како је

$$\cos\measuredangle MAB = \frac{(\sqrt{3})^2 + (3\zeta)^2 - (4\zeta)^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot 3\zeta} \geqslant \frac{(\sqrt{3})^2 + (3\zeta)^2 - (5\zeta)^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot 3\zeta} = \cos\measuredangle MAC,$$

то је $\measuredangle MAB \leqslant \measuredangle MAC$, обзиром да је функција cos строго опадајућа на интервалу $(0,\pi)$. Следи да је $2\cdot\measuredangle MAB \leqslant \measuredangle MAB + \measuredangle MAC = \measuredangle CAB = \frac{\pi}{3}$, па је $\measuredangle MAB \leqslant \frac{\pi}{6}$. Аналогно се може доказати да је $\measuredangle MBA \leqslant \frac{\pi}{6}$. Следи да је $\measuredangle AMB \geqslant \frac{2\pi}{3}$, па је $\cos\measuredangle AMB \leqslant \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$. С друге стране, како је

$$\cos\measuredangle AMB = \frac{(3\zeta)^2 - (4\zeta)^2 - (\sqrt{3})^2}{2\cdot 3\zeta\cdot 4\zeta} = \frac{25}{24} - \frac{1}{8\zeta^2}, \tag{4}$$

неједнакост $\cos\measuredangle AMB \leqslant -\frac{1}{2}$ је за $\zeta^2 = \frac{75+36\sqrt{3}}{193}$ еквивалентна нетачној неједнакости $193 \geqslant 37\cdot(25+12\sqrt{3})$. Следи да мора бити $\zeta^2 = \frac{75-36\sqrt{3}}{193}$. Коначно, на основу једнакости (4) добијамо

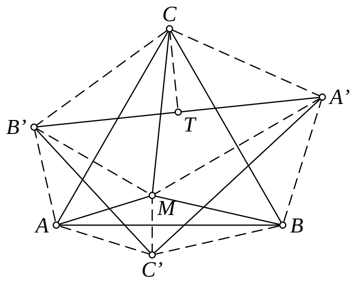
$$\begin{aligned}\cos\measuredangle AMB &= \frac{25}{24} - \frac{193}{8\cdot(75-36\sqrt{3})} = \frac{25}{24} - \frac{193\cdot(75+36\sqrt{3})}{8\cdot 9\cdot(25^2-(12\sqrt{3})^2)}\\ &= \frac{25}{24} - \frac{193\cdot 3\cdot(25+12\sqrt{3})}{8\cdot 9\cdot 193} = -\frac{\sqrt{3}}{2},\end{aligned}$$

па је $\measuredangle AMB = \frac{5\pi}{6}$. $\triangle$

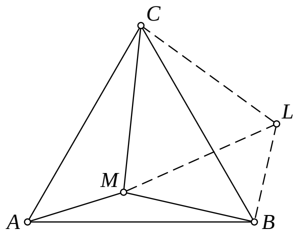
Решење 4 (Примена осне симетрије). Нека су A', B' и C' тачке симетричне тачки M у односу на праве BC, CA и AB, редом, сл. 3. За $\triangle A'CB'$ важи $CA' = CB' = CM = 10$ и $\measuredangle B'CA' = 120°$. Нека је T средиште дужи $A'B'$. Троугао $A'CT$ је половина једнакостраничног троугла, па је $A'B' = 2\cdot TA' =$

$2 \cdot \dfrac{CA'\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$. Аналогно је $B'C' = 6\sqrt{3}$ и $C'A' = 8\sqrt{3}$. Како је $A'B'^2 = B'C'^2 + C'A'^2$, то је на основу обратне Питагорине теореме $\measuredangle B'C'A' = 90°$. Како је $\measuredangle AC'B' = \dfrac{180° - \measuredangle B'AC'}{2} = \dfrac{180° - 120°}{2} = 30°$ и аналогно $\measuredangle BC'A' = 30°$, то је

$$\measuredangle AMB = \measuredangle AC'B = \measuredangle AC'B' + \measuredangle B'C'A' + \measuredangle BC'A' = 150°. \ \triangle$$



Слика 3



Слика 4

Решење 5 (Примена ротације). Претпоставимо да је $MA = 3$, $MB = 4$ и $MC = 5$. Нека се при ротацији $\mathcal{R}_{C,60°}$ равни $\triangle ABC$, тачка M слика у тачку L, сл. 4. Тада је $\mathcal{R}_{C,60°}(A) = B$ и $\mathcal{R}_{C,60°}(C) = C$, па је $LB = MA = 3$ и $LC = MC = 5$, а како је $\measuredangle MCL = 60°$, то је $\triangle MLC$ једнакостранични, па је $ML = 5$. Како важи $ML^2 = LB^2 + MB^2$, то је на основу обрнуте Питагорине теореме $\measuredangle LBM = 90°$. Уведимо ознаке $BC = a$ и $\measuredangle BML = \eta$. Тада је $\cos\eta = \dfrac{MB}{ML} = \dfrac{4}{5}$ и $\sin\eta = \dfrac{LB}{ML} = \dfrac{3}{5}$. На основу косинусне теореме, примењене на $\triangle CMB$ је

$$\begin{aligned} a^2 &= 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos(60° + \eta) = 41 - 40\Big(\frac{1}{2}\cos\eta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\eta\Big) \\ &= 41 - 40 \cdot \frac{1}{2} \cdot \Big(\frac{4}{5} - \sqrt{3} \cdot \frac{3}{5}\Big) = 25 + 12\sqrt{3}. \end{aligned}$$

На основу косинусне теореме, примењене на $\triangle AMB$ је

$$\cos\measuredangle AMB = \frac{3^2 + 4^2 - a^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{25 - 25 - 12\sqrt{3}}{24} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

па је $\measuredangle AMB = 150°$. $\triangle$

Решење 6 (Примена ротације). Дефинишемо тачку L као у претходном решењу, па на основу обратне Питагорине теореме доказујемо да је $\measuredangle LBM = 90°$. Међутим, како је $\measuredangle CAM = \measuredangle CBL$, то је $\measuredangle CAM + \measuredangle CBM = \measuredangle CBL + \measuredangle CBM = \measuredangle LBM = 90°$. Како је $\measuredangle MAB = \measuredangle CAB - \measuredangle CAM = 60° - \measuredangle CAM$ и $\measuredangle MBA = 60° - \measuredangle CBM$, то је $\measuredangle MAB + \measuredangle MBA = 120° - (\measuredangle CAM + \measuredangle CBM) = 120° - 90° = 30°$, одакле следи да је $\measuredangle AMB = 150°$. $\triangle$

Решење 7 (Примена косинусне теореме). Претпоставимо да је $MA = 3$, $MB = 4$ и $MC = 5$. Уведимо ознаке $AB = a$, $\cos\measuredangle MCA = u$, $\cos\measuredangle MCB = v$. Тада је на основу косинусне теореме, $u = \dfrac{a^2+16}{10a}$ и $v = \dfrac{a^2+9}{10a}$. Како је $\measuredangle BCA = \dfrac{\pi}{3}$, то је $\cos(\measuredangle MCA + \measuredangle MCB) = \cos\dfrac{\pi}{3}$, тј. $uv - \sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2} = \dfrac{1}{2}$, одакле добијамо да важи $2\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2} = 2uv - 1$. Квадрирањем последње једнакости добија се $4(1-u^2)(1-v^2) = 4u^2v^2 - 4uv + 1$. Множењем и сређивањем следи једнакост

$$4(u^2+v^2) - 4uv - 3 = 0. \tag{5}$$

Нека је $k = \dfrac{u}{v}$. Тада је $k = \dfrac{a^2+16}{a^2+9} = 1 + \dfrac{7}{a^2+9}$, одакле је

$$a^2 + 9 = \frac{7}{k-1}, \tag{6}$$

$$a^2 = \frac{7}{k-1} - 9 = \frac{16-9k}{k-1}. \tag{7}$$

Ако у једнакости (5), u заменимо са kv, добијамо једнакост $4(k^2+1)v^2 - 4kv^2 - 3 = 0$, одакле следи да важи $v^2 = \dfrac{3}{4(k^2-k+1)}$. С друге стране, из (6) и (7) имамо

$$\begin{aligned} v^2 &= \frac{(a^2+9)^2}{(10a)^2} = \frac{49}{(k-1)^2}\cdot\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{a^2} = \frac{49}{(k-1)^2}\cdot\frac{1}{100}\cdot\frac{k-1}{16-9k} \\ &= \frac{49}{100}\cdot\frac{1}{(k-1)(16-9k)}. \end{aligned}$$

Следи да важи $\dfrac{49}{100}\cdot\dfrac{1}{(k-1)(16-9k)} = \dfrac{3}{4(k^2-k+1)}$, одакле можемо добити једнакост $724k^2 - 1924k + 1249 = 0$, тј. једнакост

$$4\cdot 181\cdot k^2 - 4\cdot 481\cdot k + 1249 = 0.$$

Дискриминанта D ове квадратне једначине по k је

$$D = 4^2\cdot(481^2 - 181\cdot 1249) = 4^2\cdot 5292 = 4^2\cdot 36\cdot 147 = 4^2\cdot 6^2\cdot 3\cdot 49 = (4\cdot 6\cdot 7)^2\cdot 3.$$

Следи да је $k = \dfrac{481+42\sqrt{3}}{2\cdot 181}$ или $k = \dfrac{481-42\sqrt{3}}{2\cdot 181}$, па важи

$$\begin{aligned} \frac{7}{k-1} &= \frac{7}{\frac{481+42\sqrt{3}}{2\cdot 181} - 1} = \frac{7\cdot 2\cdot 181}{119+42\sqrt{3}} = \frac{7\cdot 2\cdot 181}{7(17+6\sqrt{3})} = \frac{2\cdot 181\cdot(17-6\sqrt{3})}{17^2 - (6\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{2\cdot 181\cdot(17-6\sqrt{3})}{181} = 34 - 12\sqrt{3}, \end{aligned}$$

тј. $\dfrac{7}{k-1} = 34 + 12\sqrt{3}$. Добијамо да важи $a^2 = \dfrac{7}{k-1} - 9 = 25 - 12\sqrt{3}$, тј. $a^2 = 25 + 12\sqrt{3}$. Претпоставимо да је $a^2 = 25 - 12\sqrt{3}$. Како је $\measuredangle AMB + \measuredangle BMC + \measuredangle CMA = 2\pi$, то бар један од тих углова мора бити туп, а како је

$$MA^2 + MB^2 - AB^2 \leqslant \min\{MB^2 + MC^2 - BC^2, MC^2 + MA^2 - CA^2\},$$

то такав мора бити $\measuredangle AMB$. Међутим како је $\cos\measuredangle AMB = \dfrac{3^2+4^2-a^2}{2\cdot 3\cdot 4}$, то за $a^2 = 25-12\sqrt{3}$, важи $\cos\measuredangle AMB = \dfrac{\sqrt{3}}{2} > 0$, што је немогуће. Следи да мора бити $a^2 = 25+12\sqrt{3}$, па је $\cos\measuredangle AMB = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, одакле је $\measuredangle AMB = \dfrac{5\pi}{6}$. $\triangle$

Решење 8 (Примена аналитичке геометрије). Претпоставимо да је $MA = 3$, $MB = 4$ и $MC = 5$. Нека је у равни $\triangle ABC$ уведен Декартов правоугли координатни систем и да тачке A, B, C и M имају редом координате $A(0,0)$, $B(2p,0)$, $C(p,p\sqrt{3})$ и $M(x,y)$, при чему је p позитиван реалан број. Тада су и x и y позитивни реални бројеви. Једнакост $MA = 3$ се сада може написати као

$$x^2+y^2 = 9, \tag{8}$$

док се једнакост $MB = 4$ може написати као $(x-2p)^2+y^2 = 16$, тј. $x^2+y^2-4px+4p^2 = 16$, из које, заједно са једнакошћу (8) следи

$$x = p - \frac{7}{4p}. \tag{9}$$

Једнакост $MC = 5$ се може написати као $(x-p)^2+(y-p\sqrt{3})^2 = 25$, тј. као једнакост, $x^2+y^2-2px+p^2+3p^2-2p\sqrt{3}y = 25$, из које се, ако се израз x^2+y^2 замени са 9, а израз $-2px$, изразом $-2p\Big(p-\dfrac{7}{4p}\Big)$, може добити једнакост $2p^2 - 2p\sqrt{3}y = \dfrac{25}{2}$. Из последње једнакости добијамо везу

$$y = \frac{p}{\sqrt{3}} - \frac{25}{4\sqrt{3}p}. \tag{10}$$

Ако се десне стране једнакости (9) и (10) убаце у једнакост (8), можемо добити једнакост $\dfrac{4}{3}p^2 + \dfrac{193}{12p^2} = \dfrac{50}{3}$, која када се помножи изразом $12p^2$, постаје једнакост

$$16p^4 - 200p^2 + 193 = 0.$$

Дискриминанта D ове квадратне једначине по p^2 је

$$\begin{aligned} D &= 200^2 - 4\cdot 16\cdot 193 = 2^2\cdot 4^2\cdot 25^2 - 4\cdot 16\cdot 193 = 8^2\cdot(625-193)\\ &= 8^2\cdot 432 = 8^2\cdot 4\cdot 108 = 8^2\cdot 4\cdot 36\cdot 3 = 8^2\cdot 2^2\cdot 6^2\cdot 3 = (8\cdot 2\cdot 6)^2\cdot 3. \end{aligned}$$

Следи да је $p^2 = \dfrac{25+12\sqrt{3}}{4}$ или $p^2 = \dfrac{25-12\sqrt{3}}{4}$. Како је $y = \dfrac{4p^2-25}{4\sqrt{3}p}$ и $y>0$, следи да мора бити $p^2 = \dfrac{25+12\sqrt{3}}{4}$. Из $\cos\measuredangle AMB = \dfrac{3^2+4^2-(2p)^2}{2\cdot 3\cdot 4} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, добијамо $\measuredangle AMB = 150^\circ$. $\triangle$

ОШ „Др Драган Херцог“, Београд

E-mail: markocos10@hotmail.com, markokoscicarm@gmail.com