Др Шефкет Арсланагић, мр Даниела Зубовић

ЕЛЕМЕНТАРНО ОДРЕЂИВАЊЕ ЕКСТРЕМНЕ ВРЕДНОСТИ ЈЕДНЕ ФУНКЦИЈЕ

Проблем елементарног одређивања екстремних вредности функција у математици, осим што је посебно интересантан, често има и извесних предности у односу на познате методе одређивања екстремних вредности помоћу диференцијалног рачуна. Добро познавање елементарних метода, поготово неједнакости, омогућује да се велики број проблема са екстремним вредностима функција може успешно решити. Овде ће бити приказан један такав пример.

Пример. Наћи највећу вредност функције

$$f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{2x-7} + \sqrt{18-3x}.$$

„Решење“ 1. Очигледно, домен дате функције је $D = \left[\frac{7}{2}, 6\right]$. Покушајмо да одредимо њену највећу вредност коришћењем диференцијалног рачуна. Извод дате функције је

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} + \frac{1}{\sqrt{2x-7}} - \frac{3}{2\sqrt{18-3x}}.$$

Сада би требало решити једначину $f'(x) = 0$, за коју добијамо да је еквивалентна са

$$\frac{1}{2\sqrt{x-2}} + \frac{1}{\sqrt{2x-7}} = \frac{3}{2\sqrt{18-3x}},$$

односно

$$\sqrt{18-3x}\,(\sqrt{2x-7} + 2\sqrt{x-2}) = 3\sqrt{x-2}\,\sqrt{2x-7}.$$

Решавање ове ирационалне једначине захтева поприлично посла. Ако покушамо да насумичним пробањем погодимо решења, можемо евентуално да нађемо да је једно њено решење број 5 (који припада домену D). Но, да бисмо овим путем наставили даље, морали бисмо да утврдимо да ли ова једначина има још реалних решења, као и да нађемо за које x важи $f'(x) > 0$, односно $f'(x) < 0$. Дакле, опет много посла. Све то ћемо избећи тако што наведемо два решења овог проблема користећи погодне неједнакости.

„Решење“ 2. Покушаћемо да решимо овај задатак применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине за два броја. Најпре, имамо да је

$$\sqrt{x-2} = \sqrt{(x-2)\cdot 1} \leqslant \frac{x-2+1}{2}, \quad \text{тј.} \quad \sqrt{x-2} \leqslant \frac{x-1}{2},$$

при чему у нашем случају важи строга неједнакост, јер једнакост важи за $x = 3 \notin D$. Слично је

$$\sqrt{2x-7} = \sqrt{(2x-7)\cdot 1} \leqslant \frac{2x-7+1}{2}, \quad \text{тј.} \quad \sqrt{2x-7} \leqslant x-3,$$

где једнакост важи за $x = 4 \in D$, као и

$$\sqrt{18-3x} = \sqrt{(18-3x)\cdot 1} \leqslant \frac{18-3x+1}{2}, \quad \text{тј.} \quad \sqrt{18-3x} \leqslant \frac{19-3x}{2},$$

где једнакост важи за $x = \dfrac{17}{3} \in D$.

Дакле, не постоји јединствено $x \in D$ за које би у наведеним неједнакостима важила једнакост, па се на овај начин не може доћи до решења овог задатка.

Решење 3. Искористићемо сада неједнакост између аритметичке и квадратне средине за три броја, па добијамо

$$\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2x-7}+\sqrt{18-3x}}{3} \leqslant \sqrt{\frac{(\sqrt{x-2})^2+(\sqrt{2x-7})^2+(\sqrt{18-3x})^2}{3}},$$

одакле је

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{2x-7}+\sqrt{18-3x} \leqslant \sqrt{3}\,\sqrt{x-2+2x-7+18-3x},$$

тј.

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{2x-7}+\sqrt{18-3x} \leqslant 3\sqrt{3}.$$

При том једнакост важи ако и само ако је $\sqrt{x-2} = \sqrt{2x-7} = \sqrt{18-3x}$, тј. за $x = 5 \in D$. Дакле, имамо да је $f_{max} = f(5) = 3\sqrt{3}$.

Решење 4. Означимо $\sqrt{x-2} = a$, $\sqrt{2x-7} = b$ и $\sqrt{18-3x} = c$. Добијамо да за $x \in D$ важи $a^2+b^2+c^2 = 9$. Како је

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

и $ab+bc+ca \leqslant a^2+b^2+c^2$ (што лако следи из

$$\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] \geqslant 0\,)$$

добијамо да је

$$(a+b+c)^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2) \leqslant 3\cdot 9,$$

тј. $a+b+c \leqslant 3\sqrt{3}$, при чему једнакост важи ако и само ако је $a = b = c = \sqrt{3}$. Добијамо да је $f_{max} = f(5) = 3\sqrt{3}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.

[2] Š. Arslanagić, *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet, Sarajevo, 2006.

[3] М. Јовановић, Д. Тошић, *Збирка решених задатака и проблема из математике за ученике средњих школа*, Завод за уџбенике, Беорад, 2010.

Ш.А.: Природно-математички факултет, Универзитет у Сарајеву, Босна и Херцеговина

E-mail: asefket@pmf.unsa.ba