НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

Петар Свирчевић

НЕОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ РЕЦИПРОЧНЕ ВРЕДНОСТИ ПРОИЗВОДА ЛИНЕАРНИХ ФАКТОРА

У овом кратком прилогу ћемо показати како се може наћи неодређени интеграл

$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+2a)\cdots(x+na)}, \tag{1}$$

који у општем облику није наведен у приручнику [1]. Затим ћемо овај резултат уопштити на случај интеграла

$$\int \frac{dx}{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)},$$

дакле на случај реципрочне вредности производа произвољног броја линеарних фактора. На крају ћемо навести два експлицитно решена задатка који се односе на ова два типа интеграла.

Да бисмо урадили наведено, најпре ћемо функцију $B(x,n) = \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ да раставимо на збир простих разломака, тј. доказаћемо да важи

$$B(x,n) = \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \frac{1}{n!}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{\binom{n}{i}}{x+i}\right), \quad n \in \mathbf{N}. \tag{2}$$

Ово је свакако најједноставније учинити математичком индукцијом. Узмимо, дакле, да је $n=1$; тада се (2) своди на

$$B(x,1) = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1!}\left(\frac{\binom{1}{0}}{x} - \frac{\binom{1}{1}}{x+1}\right).$$

Претпоставимо да растављање (2) важи за неки природан број n. Тада је

$$B(x,n+1) = \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)}\cdot\frac{1}{x+n+1} = \frac{1}{n!}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^n \frac{\binom{n}{i}}{(x+i)(x+n-1)}\right)$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{\binom{n}{i}}{n+1-i}\left(\frac{1}{x+i} - \frac{1}{x+n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{n!}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{\binom{n}{i}}{(n+1-i)(x+i)} - \frac{1}{x+n+1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{\binom{n}{i}}{n+1-i}\right)$$
$$= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{\binom{n+1}{i}}{x+i} - \frac{1}{(n+1)!(x+n+1)}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n+1}{i}$$
$$= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\frac{\binom{n+1}{i}}{x+i} - \frac{1}{(n+1)!(x+n+1)}\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\binom{n+1}{i}$$
$$= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\frac{\binom{n+1}{i}}{x+i} - \frac{1}{(n+1)!(x+n+1)}(1-1)^{n+1}$$
$$= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\frac{\binom{n+1}{i}}{x+i},$$

чиме је тврђење (2) доказано. Ако ту релацију неодређено интегришемо, добијамо

$$\int\frac{dx}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \frac{1}{n!}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\ln|x+i|\right)+C. \tag{3}$$

Ако сада у (3) уместо x уврстимо $x+1$, тада имамо

$$\int\frac{dx}{(x+1)\cdots(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{n!}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\ln|x+i+1|\right)+C. \tag{4}$$

Уврстимо даље $n-1$ уместо n, па релација (4) прима облик

$$\int\frac{dx}{(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)} = \frac{1}{(n-1)!}\left(\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}\ln|x+i+1|\right)+C. \tag{5}$$

Специјално, за $n=1$ једнакост (5) постаје

$$\int\frac{dx}{x+1} = \frac{1}{0!}\left(\sum_{i=0}^{0}(-1)^0\binom{0}{0}\ln|x+0+1|\right)+C = \ln|x+1|+C,$$

што смо и очекивали.

Да бисмо одредили интеграл (1), заменимо x у релацији (5) са $\dfrac{x}{a}$, где је $a\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$, па добијамо

$$\int\frac{dx}{(x+a)(x+2a)\cdots(x+na)} = \frac{1}{(n-1)!a^{n-1}}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}\ln|x+a(i+1)|+C. \tag{6}$$

Сада ћемо анализирати уопштење претходне формуле за интеграл

$$I(x,a_1,a_2,\ldots,a_n) = \int\frac{dx}{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)}, \tag{7}$$

где су $a_i \in \mathbf{R}$ константе и важи $a_i \neq a_j$ кад год је $i \neq j$.

Напомена 1. Не бисмо добили ништа на општости када бисмо подинтегралну функцију узели у облику $\frac{1}{(b_1x+c_1)(b_2x+c_2)\cdots(b_nx+c_n)}$, $b_i \neq 0$, $i = 1, \dots, n$, јер се сви линеарни фактори могу нормирати, па бисмо тако добили

$$\frac{1}{(b_1x+c_1)(b_2x+c_2)\cdots(b_nx+c_n)} = \frac{1}{b_1b_2\cdots b_n(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)},$$

где је $a_i = c_i/b_i$, $i = 1, \dots, n$.

Посматрајмо најпре интеграл (7) за $n = 2$. Тада је

$$\int \frac{dx}{(x+a_1)(x+a_2)} = \frac{1}{a_2-a_1}\int\Big(\frac{1}{x+a_1} - \frac{1}{x+a_2}\Big) = \frac{1}{a_2-a_1}\ln\Big|\frac{x+a_1}{x+a_2}\Big| + C.$$

За $n = 3$ подинтегрална функција се може написати као

$$\frac{1}{(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)} \equiv \frac{A_1}{x+a_1} + \frac{A_2}{x+a_2} + \frac{A_3}{x+a_3},$$

при чему се лако добија да је $A_1 = \frac{1}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)}$, $A_2 = \frac{1}{(a_3-a_2)(a_1-a_2)}$, $A_3 = \frac{1}{(a_1-a_3)(a_2-a_3)}$. Уочавамо да се имениоци друга два разломка добијају ако у имениоцу за A_1 циклично померамо индексе 1, 2, 3. Формалну неодређену интеграцију нећемо исписивати.

Предлажемо читаоцу да на аналоган начин дође до формуле за тражено растављање у случају $n = 4$. На основу таквих разматрања можемо хеуристички закључити да у општем случају важи

$$\frac{1}{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)} \equiv \frac{A_1}{x+a_1} + \frac{A_2}{x+a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x+a_n}, \tag{8}$$

где је

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)\cdots(a_{n-1}-a_1)(a_n-a_1)},\\
A_2 &= \frac{1}{(a_3-a_2)(a_4-a_2)(a_5-a_2)\cdots(a_n-a_2)(a_1-a_2)},\\
A_3 &= \frac{1}{(a_4-a_3)(a_5-a_3)(a_6-a_3)\cdots(a_1-a_3)(a_2-a_3)},\\
&\vdots\\
A_n &= \frac{1}{(a_1-a_n)(a_2-a_n)(a_3-a_n)\cdots(a_{n-2}-a_n)(a_{n-1}-a_n)}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Одатле је

$$I(x, a_1, a_2, \dots, a_n) = A_1\ln|x+a_1| + A_2\ln|x+a_2| + \cdots + A_n\ln|x+a_n| + C.$$

Уз доста исписа може се доказати математичком индукцијом да важи растављање (8) с вредностима (9) за константе A_i.

Напомена 2. Јасно је да је услов $a_i \neq a_j$ за $i \neq j$ неопходан да би претходна извођења била могућа.

Задатак 1. Наћи $I = \displaystyle\int \frac{dx}{(x+5)(x+10)(x+15)(x+20)}$.

Решење. Тај интеграл можемо да напишемо у облику $I = \int \frac{dx}{(x+5)(x+2\cdot 5)(x+3\cdot 5)(x+4\cdot 5)}$, а то значи да можемо да применимо формулу (6) са $a = 5$ и $n = 4$. Добија се

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{3!\,5!}\left(\sum_{i=0}^{3}(-1)^i\binom{3}{i}\ln|x+5(i+1)|\right) + C \\
&= \frac{1}{750}(\ln|x+5| - 3\ln|x+10| + 3\ln|x+15| - \ln|x+20|) + C \\
&= \frac{1}{750}\ln\left|\frac{(x+5)(x+15)^3}{(x+10)^3(x+20)}\right| + C.
\end{aligned}$$

Задатак 2. Одредити $I(x, -2, 3, -5, 6)$.

Решење. Ради се о интегралу облика (7) у којем је $n = 4$, $a_1 = -2$, $a_2 = 3$, $a_3 = -5$, $a_4 = 6$. Примењујући формуле (8) и (9) добијамо да је

$$\frac{1}{(x-2)(x+3)(x-5)(x+6)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x+3} + \frac{A_3}{x-5} + \frac{A_4}{x+6},$$

са

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{(3+2)(-5+2)(6+2)} = -\frac{1}{120}, \quad & A_2 &= \frac{1}{(-2-3)(-5-3)(6-3)} = \frac{1}{120}, \\
A_3 &= \frac{1}{(-2+5)(3+5)(6+5)} = \frac{1}{264}, \quad & A_4 &= \frac{1}{(-2-6)(3-6)(-5-6)} = -\frac{1}{264}.
\end{aligned}$$

Зато је

$$\begin{aligned}
I(x, -2, 3, -5, 6) &= \int \frac{dx}{(x-2)(x+3)(x-5)(x+6)} \\
&= \frac{1}{120}\ln\left|\frac{x+3}{x-2}\right| + \frac{1}{264}\ln\left|\frac{x-5}{x+6}\right| + C.
\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] I. N. Bronštejn, K. A. Semenjajev, *Matematički priručnik*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1970.

[2] П. Свирчевић, *Хеуристика и суме реципрочних транслираних производа*, Тангента **87/3**, Београд, 2016/17.

Tehnička škola, Zagreb

E-mail: `petar.svircevic@zg.t-com.hr`